PLANCHE $\star$: limites et continuité

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

1. Démontrer que si f possède une limite finie quand x tend vers a alors cette limite est unique.
2. Démontrer que si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.
3. Démontrer que si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.
4. Démontrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) de réels appartenant à I qui converge vers a on a $lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exercice 2 :

1. Démontrer que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$. En déduire que la fonction sinus est continue en 0.
2. En utilisant le résultat précédent et la relation $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, démontrer que la fonction cosinus est continue en 0.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{(équation fonctionnelle de Cauchy)}$$

Démontrer que si f est continue en un point a alors f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$. Démontrer que si f et g sont continues en a alors il en est de même pour $|f|$ et $f + g$.

Exercice 5 :

1. Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$. Démontrer qu'il existe un réel α appartenant à $[0\,;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note f^n la fonction $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est répétée n fois.

   Démontrer qu'il existe un réel α compris entre 0 et 1 tel que, pour tout entier naturel n non nul, $f^n(\alpha) = \alpha$.