Chapitre 1

Rappels

1.1 Généralités

1.1.1 Vocabulaire

Une expérience aléatoire (ou épreuve) est une expérience dans laquelle les résultats dépendent du hasard. L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. Il est noté en général Ω.
Une éventualité est un élément de l'univers (on dit aussi événement élémentaire).
Un événement est une partie de l'univers.

1.1.2 Opérations autorisées

Événement contraire de A, noté $\bar{A}$: c'est l'événement qui contient toutes les éventualités qui ne sont pas dans A.
Réunion de deux événements A et B, notée $A \cup B$: c'est l'événement qui contient toutes les éventualités de A ou de B.
Intersection de deux événements A et B, notée $A \cap B$: c'est l'événement qui contient les éventualités communes à A et à B.
Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les événements A et B sont incompatibles.
Inclusion : A inclus dans B, noté $A \subset B$, signifie : si A est réalisé alors B est réalisé.

1.2 Définitions et propriétés des probabilités

1.2.1 Définition

Si on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les événements d'une expérience aléatoire, on appelle probabilité définie sur Ω, toute fonction P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ qui à un événement A associe $P(A)$ et qui vérifie :

- $P\Omega) = 1$
- si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1.2.2 Propriétés

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$ (formule des probabilités totales)
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.2.3 Équiprobabilité

On dit qu'il y a équipribabilité quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

1.2.4 Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

1.3 Probabilités conditionnelles

1.3.1 Définition

Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B est le nombre défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.3.2 Formule de Bayès

Si en plus $P(A) \neq 0$ alors on peut écrire :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

N.B : deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

1.3.3 Formule des probabilités totales

Soit A un événement et $\bar{A}$ son contraire, pour tout événement B on a :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$$

Chapitre 2

Variables aléatoires

2.1 Variables aléatoires discrètes

2.1.1 Définition

Soit Ω un univers fini contenant N éventualités, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ où $N \in \mathbb{N}$.
On appelle **variable aléatoire** toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

x_i est appelé **valeur** de la variable aléatoire X et l'ensemble des couples $(x_i\,; P(X = x_i))$ constitue la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X.
Lorsque l'univers Ω est dénombrable on dit que la variable aléatoire X est discrète.

2.1.2 Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0\,;1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leqslant x) \end{aligned}$$

$F(x)$ est la probabilité de l'événement "obtenir une valeur de X inférieure ou égale à x".

2.1.3 Propriétés

Soit x et y deux réels.

- $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x)$
- $P(x < X \leqslant y) = P(X \leqslant y) - P(X \leqslant x) = F(y) - F(x)$
- F est croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $x < x_1$ alors $F(x) = 0$ et si $x \geqslant x_N$ alors $F(x) = 1$

2.1.4 Caractéristiques d'une variable aléatoire finie

On considère X une v.a. prenant les valeurs $x_1, \dots, x_N$ avec le probabilités $p_1, \dots, p_N$.
On appelle **espérance mathématique** de X le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=N} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_N x_N$$

N.B : l'espérance mathématique est la moyenne arithmétique pondérée des x_i et pour tout réel k on a $E(X + k) = E(X) + k$ et $E(kX) = kE(X)$.

On appelle **variance** de X le nombre réel positif, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=N} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_N(x_N - E(X))^2$$

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2.1.5 Théorème de Huyghens-König

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^{i=N} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$.

N.B : si k est un réel, $V(X+k) = V(X)$, $V(kX) = k^2 V(X)$ et $\sigma(kX) = |k|\sigma(X)$.

2.2 Loi binomiale

2.2.1 Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli lorsque $X(\Omega) = \{0\,;1\}$, c'est à dire X ne peut prendre que deux valeurs. L'événement $\{X = 1\}$ est communément appelé "succés" et son événement contraire "échec". Si $P(X = 1) = p$ on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Une expérience aléatoire conduisant à deux résultats est appelée épreuve de Bernoulli.

2.2.2 Loi binomiale

On considère maintenant une épreuve de Bernoulli que l'on répète N fois, les N répétitions étant indépendantes. La variable aléatoire X mesurant le nombre de succés au cours de ces N épreuves suit la loi binomiale de paramètres N et p, p étant la probabilité du succés. Dans ce cas on a :

$$P(X = k) = \binom{N}{p} p^k (1-p)^{N-k} \text{ et on écrit } X \sim \mathcal{B}(N,p)$$

.

2.2.3 Caractéristiques de la loi binomiale $\mathcal{B}(N,p)$

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale de paramètres N et p.

- $E(X) = Np$
- $V(X) = Np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{Np(1-p)}$

2.3 Loi de Poisson

On peut généraliser les définitions et propriétés d'une v.a. discrète dans le cas où X prend une infinité dénombrable de valeurs. Une loi usuelle de ce type de v.a. est la loi de Poisson.

2.3.1 Loi de Poisson

Soit λ un réel strictement positif et X une v.a. définie sur $\mathbb{N}$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ et on écrit } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

2.3.2 Caractéristiques de la loi de Poisson de paramètre λ

Soit X une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$
- $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

2.4 Variables aléatoire continues

Soit Ω un univers, on dit que la variable aléatoire X est continue si l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ de X est un intervalle de $\mathbb{R}$.
N.B : La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue possède les mêmes propriétés que celle d'une variable aléatoire discrète, elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

2.4.1 Densité de probabilité

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
- Pour tout réel x : $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

2.4.2 Propriété

Soti X une variable aléatoire continue et F la fonction de répartition de X.
- La dérivée de F sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité de X, elle est notée f.
- La fonction F est la primitive de f définie par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2.4.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire continue

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

(on suppose que l'intégrale existe).

La variance de X est le nombre réel positif, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

(et l'écart-type est la racine carrée de la variance).

2.4.4 Loi uniforme

On appelle loi uniforme sur l'intervalle $I = [a\,;b]$, la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.
Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle I alors on a pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta]$ inclus dans I :

$$P(X \in [\alpha\,;\beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Caractéristiques : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

2.4.5 Loi exponentielle

On appelle loi exponentielle de paramètre λ, la loi de probabilité continue admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel positif fixé.
Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors on a pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta]$ inclus dans $\mathbb{R}^+$:

$$P(X \in [\alpha\,;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Interprétation : La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si l'on suppose que cette durée de vie ne dépend pas du temps pendant lequel l'appareil a déjà fonctionné (on dit que la durée de vie est sans vieillissement), on démontre que la loi de

probabilité de X admet une densité f de la forme $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$, pour tout réel positif x.
Caractéristiques : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

2.4.6 Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X est la loi normale de paramètres m et σ, notée $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$, si la densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$. La fonction de répartition F de X est donnée par l'intégrale :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Caractéristiques : $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.
Si les paramètres sont respectivement 0 et 1, alors on dit que la loi normale est centrée réduite. On la note $\mathcal{N}(0\,;1)$.
Théorème : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$. En effectuant le changement de variable suivant :

$$T = \frac{X-m}{\sigma}$$

on obtient une nouvelle variable aléatoire, notée T, qui suit la loi normale centrée réduite.

2.5 Approximations de la loi binomiale

On admet les résultats suivants :

2.5.1 par la loi de Poisson

Pour $N > 30$ et pour $p \leqslant 0,1$ tels que $np(1-p) \leqslant 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(N\,;p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda = Np$.

2.5.2 par la loi normale

Pour $N \geqslant 50$ et pour p ni voisin de 0, ni voisin de 1, tels que $Np(1-p) > 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(N\,;p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ où $m = Np$ et $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$.

2.6 Somme de deux variables aléatoires, lois limites

2.6.1 Indépendance de deux variables aléatoire

Soit X et Y deux v.a. discrètes. On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
X et Y sont deux v.a. indépendantes si :

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

2.6.2 Somme de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires.

- La somme $X + Y$ est une v.a. $S = X + Y$.
- La loi de probabilité de S est obtenue en associant, à chaque valeur s de S, la somme des probabilités correspondantes à tous les couples dont la somme des termes est égale à s.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

2.6.3 Théorème de Bernoulli (loi faible des grands nombres)

Soit X une v.a. et n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de même loi de probabilité que celle de X.
Posons $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - E(X)| < \varepsilon) = 1$$

2.6.4 Théorème de la limite centrée

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes de même loi de probabilité, de même espérance mathématique m et de même variance σ^2, alors lorsque n est "suffisamment grand" :

- La loi de probabilité de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit "approximativement" la loi normale d'espérance nm et d'écart-type $\sigma\sqrt{n}$.
- La loi de probabilité de $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$ suit "approximativement" la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

2.6.5 Inégalité de Bienaymé-Chebychev

Soit X une v.a. d'espérance mathématique m et d'écart-type σ. Pour tout réel t strictement positif :

$$P(|X - m| \geqslant t\sigma) \leqslant \frac{1}{t^2} \text{ ou encore } P(|X - m| \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}$$