Éléments de logique et techniques de raisonnement

Exercice 1 : Parmi les propositions suivantes quelle est la négation de P : "Tous les mathématiciens boivent du vin" ?

1. Tous les mathématiciens boivent autre chose que du vin.
2. Il existe un mathématicien ne buvant pas de vin.
3. Il n'existe pas de mathématicien buvant du vin.

Exercice 2 : Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses puis donner leur contraposée et leur négation :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $x \neq y \Rightarrow e^x \neq e^y$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $x > e \Rightarrow \ln x > 0$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$.

Exercice 3 : Soit un ensemble de 50 animaux qui sont soit mâle soit femelle et soit carnivore soit herbivore. On considère les propositions suivantes :
P : "Tout mâle est carnivore".
Q : "Il existe un mâle carnivore et il existe une femelle carnivore".

1. Traduire P sous la forme d'une implication et en donner la contraposée.
2. Donner la négation de P, puis celle de Q.
3. Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui sont vrais ?
   Dans l'ensemble des 50 animaux ...
   (a) Pour prouver que P est vrai, il suffit de vérifier que tous les herbivores sont des femelles.
   (b) Pour prouver que P est faux, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont herbivores.
   (c) Pour prouver que Q est vrai, il suffit de trouver une femelle carnivore.
   (d) Pour prouver que Q est vrai, il est nécessaire de trouver une femelle carnivore.
   (e) Pour prouver que Q est faux, il est nécessaire de vérifier que les 50 animaux sont herbivores.

Exercice 4 : Donner la négation des propositions suivantes :

1. $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$.
2. $P_2 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
3. $P_3 : \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \geqslant m$.
4. $P_4 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$.
5. $P_5 : \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Exercice 5 : Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g s'annule sur l'intervalle $[0\,;1]$.
3. Le polynôme P admet exactement une racine réelle.
4. La fonction h possède un maximum en x_0.
5. La fonction f est croissante sur $[a\,;b]$.

Exercice 6 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1.$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$	3.$\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$	5.$\forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = y + z$
2.$\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, xy = x$	4.$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x = y + z$	6.$\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y + z$

Exercice 7 : Traduire chacune des propositions suivantes avec une implication et donner sa valeur de vérité :

1. $\forall m \in \mathbb{Z}$, pour que m soit multiple de 6, il est nécessaire qu'il soit multiple de 3.
2. $\forall m \in \mathbb{Z}$, pour que m soit multiple de 6, il est suffisant qu'il soit multiple de 3.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x + 2 \geqslant 3$, il faut que x soit positif ou nul.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x + 2 \geqslant 3$, il suffit que $x \geqslant 2$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = 4$ seulement si $x = 2$.

Exercice 8 : Écrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs, préciser si elles sont vraies ou fausses :

1. Il existe un nombre réel qui est plus petit que tous les autres.
2. Le nombre π n'est le sinus d'aucun nombre réel.
3. Tous les réels possèdent un inverse dans $\mathbb{R}$.
4. La valeur absolue d'une somme de deux réels est inférieure à la somme des valeurs absolues de ces deux réels.

♡ **Exercice 9 :** Démontrer les propositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 3.\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad 4.\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} p \times p! = (n+1)! - 1$$

Exercice 10 :

1. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3^n$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (on suppose $n \geqslant 1$).
   Démontrer que $\forall n > 1, F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$.

Exercice 11 :

1. Démontrer que $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.
2. Démontrer que $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $13^n - 4^n$ est divisible par 9.

♠ **Exercice 12 :**

1. Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède au moins un diviseur premier.
2. Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou s'écrit comme produit de nombres premiers (utiliser le résultat précédent).

Exercice 13 :

1. ♡ Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout nombre réel x non nul et supérieur ou égal à -1, on a :

   $$(1+x)^n > 1 + nx \qquad \text{(Inégalité de Bernoulli)}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe k appartenant à $\mathbb{N}$ et q appartenant à $\mathbb{N}$ tels que : $n = 2^k(2q+1)$.
3. On considère une suite (a_n) définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + 4a_n}{3a_{n+1} + 2a_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et $a_0 = a_1 = 1$. Calculer a_n en fonction de n.