CAML

11 - Logique propositionnelle

http://tsi.tuxfamily.org/OCaml

Louis THUILLIER Lycée

19 juin 2024

Si $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Vocabulaire

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation.

Si $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ et $a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Vocabulaire

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation.

- x_1, $\neg x_2$ sont des littéraux.
- $x_1 \wedge x_2$ n'en est pas une.

Si $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Vocabulaire

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation.

- x_1, $\neg x_2$ sont des littéraux.
- $x_1 \wedge x_2$ n'en est pas une.

Vocabulaire

On appelle **clause** une formule propositionnelle qui n'utilise que des littéraux et la disjonction.

Si $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ et $a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Vocabulaire

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation.

- x_1, $\neg x_2$ sont des littéraux.
- $x_1 \wedge x_2$ n'en est pas une.

Vocabulaire

On appelle **clause** une formule propositionnelle qui n'utilise que des littéraux et la disjonction. Comme la disjonction est associative et commutative, on ne met pas de parenthèse.

Si $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ et $a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Vocabulaire

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation.

- x_1, $\neg x_2$ sont des littéraux.
- $x_1 \wedge x_2$ n'en est pas une.

Vocabulaire

On appelle **clause** une formule propositionnelle qui n'utilise que des littéraux et la disjonction. Comme la disjonction est associative et commutative, on ne met pas de parenthèse.

- $x_1 \vee \neg x_2$ et $x_1 \vee x_1$ sont des clauses,
- $x_1 \wedge x_2$ n'en est pas une.

En informatique théorique, le **problème SAT** ou problème de **satisfaisabilité** booléenne est le problème de décision, qui, étant donnée une formule de logique propositionnelle, détermine s'il existe une valuation qui rend la formule vraie.

En informatique théorique, le **problème SAT** ou problème de **satisfaisabilité** booléenne est le problème de décision, qui, étant donnée une formule de logique propositionnelle, détermine s'il existe une valuation qui rend la formule vraie.

Dans ce cas, on dit que la formule est **satisfiable**.

Vocabulaire

On dit que a est une **forme normale conjonctive** si

$$a = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_p$$

où chaque f_k est de la forme $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ avec $\alpha_i \in \{x_i, \neg x_i\}$

Vocabulaire

On dit que a est une **forme normale conjonctive** si

$$a = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_p$$

où chaque f_k est de la forme $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ avec $\alpha_i \in \{x_i, \neg x_i\}$

Par convention, la conjonction d'un ensemble vide de formules est interprétée comme la formule vraie $\top$ (élément neutre).

Vocabulaire

On dit que a est une **forme normale disjonctive** si

$$a = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_p$$

où chaque f_k est de la forme $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ avec $\alpha_i \in \{x_i, \neg x_i\}$

Vocabulaire

On dit que a est une **forme normale disjonctive** si

$$a = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_p$$

où chaque f_k est de la forme $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ avec $\alpha_i \in \{x_i, \neg x_i\}$

Par convention, la disjonction d'un ensemble vide de formules est interprétée comme la formule fausse $\perp$ (élément neutre).

Propriété

- Toute formule est équivalente à une unique (à l'ordre près) forme normale conjonctive.
- Toute formule est équivalente à une unique (à l'ordre près) forme normale disjonctive.

Algorithme d'obtention de la forme normale disjonctive

Étant donnée une formule relationnelle exprimée uniquement à l'aide des connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.

- On commence par descendre les connecteurs $\neg$ jusqu'aux variables à l'aide des lois de De Morgan.
- On descend les connecteurs $\wedge$ par rapport à $\vee$ en utilisant la distributivité.
- On complète les conjonctions avec les variables manquantes à l'aide du tiers exclus (en ajoutant $\mathtt{V} \equiv x \vee \neg x$) pour chacune d'elles et en utilisant la distributivité.

Pour obtenir la forme normale conjonctive, il suffit d'appliquer l'algorithme précédent à $\neg a$ puis d'utiliser les lois de De Morgan.

Un exemple :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

Un exemple :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

Un exemple :

$$\begin{aligned} a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\ &\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \end{aligned}$$

Un exemple :

$$\begin{aligned} a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\ &\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\ &\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \end{aligned}$$

Un exemple :

$$\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))
\end{aligned}$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))
\end{aligned}
$$

Un exemple :

$$\begin{aligned}
a &= \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))
\end{aligned}$$

Un exemple :

$$\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))
\end{aligned}$$

Un exemple :

$$\begin{aligned}
a &= \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z))
\end{aligned}$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)
\end{aligned}
$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)
\end{aligned}
$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge (y \vee \neg y) \wedge \neg z)
\end{aligned}
$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge (y \vee \neg y) \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)
\end{aligned}
$$

Un exemple :

$$\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge (y \vee \neg y) \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)
\end{aligned}$$

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
a &= \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg((\neg x \vee y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (\neg(\neg x \vee y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge (y \vee \neg y) \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)
\end{aligned}
$$

$2^{\text{ème}}$ *algorithme d'obtention de la forme normale disjonctive*

Étant donnée une formule relationnelle.

- On dresse la table de vérité de la formule.
- En considérant les lignes donnant `V` pour la formule, on déduit la forme normale disjonctive

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$a$$
$$=$$

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$a = x \wedge y \wedge z$$

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$a$$
$$=$$
$$x \wedge y \wedge z$$
$$\vee$$

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$a = x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \neg z$$

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \rightarrow y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$a$$
$$=$$
$$x \wedge y \wedge z$$
$$\vee$$
$$x \wedge y \wedge \neg z$$
$$\vee$$

Sur le précédent exemple dont on a déjà dressé la table de vérité :

$$a = \neg((x \to y) \vee z) \vee (x \wedge (y \vee \neg z))$$

x	y	z	a
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$$\begin{gathered} a \\ = \\ x \wedge y \wedge z \\ \vee \\ x \wedge y \wedge \neg z \\ \vee \\ x \wedge \neg y \wedge \neg z \end{gathered}$$