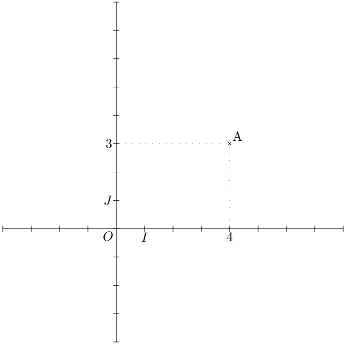
GEOMETRIE ANALYTIQUE

D. LE FUR

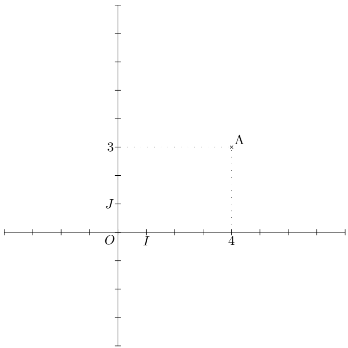
Lycée Pasteur, São Paulo

Utilisation d'un repère



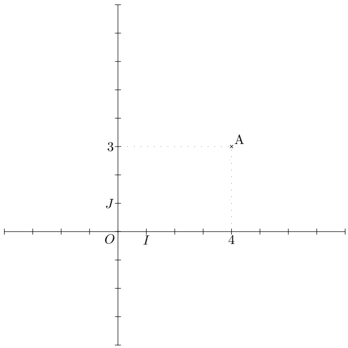
Un repère (O, I, J) est constitué de

- son origine O,
- l'axe des abscisses (OI),
- l'axe des ordonnées (OJ).



Les deux axes étant perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
Si de plus, $OI = OJ$, on dit que le repère est orthonormé.

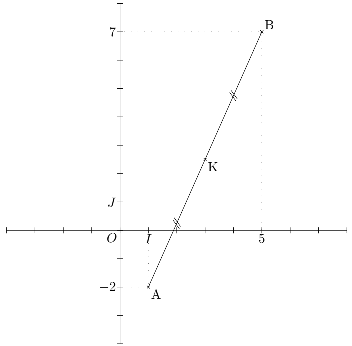
OI représente l'unité graphique sur l'axe des abscisses, OJ l'unité graphique sur l'axe des ordonnées.



Un point est placé à partir de ses coordonnées formées par le couple (abscisses ; ordonnée).
Sur la figure ci-contre, on a placé le point $A(4; 3)$:

- la première valeur 4 désigne l'abscisse de A. On notera $x_A = 4$.
- la deuxième valeur 3 désigne l'ordonnées de A. On notera $y_A = 1$.

Milieu d'un segment



Soit K le milieu du segment $[AB]$, avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors,

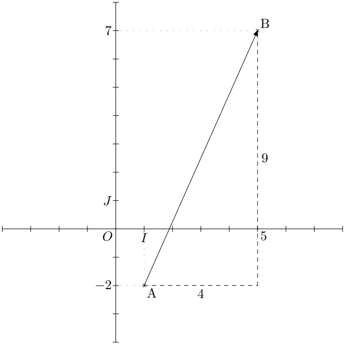
$$K\left(\frac{x_A+y_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Dans notre exemple, $A(1;-2)$ et $B(5;7)$.

$$K\left(\frac{x_A+y_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad K\left(\frac{1+5}{2};\frac{-2+7}{2}\right)$$

$$K\left(3;\frac{5}{2}\right)$$

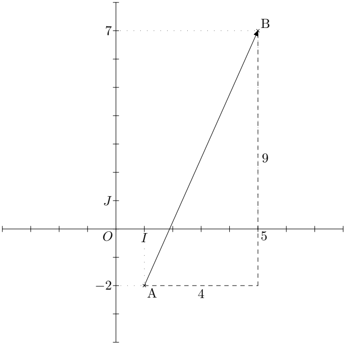
Vecteurs



Dans un repère, on définit les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array} \right.$$

NB : on fera très attention à l'ordre dans les soustractions.



Deux vecteurs de même coordonnées sont égaux.

Dans notre exemple, $A(1;-2)$ et $B(5;7)$.

Alors,
$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 5-1 \\ 7-(-2) \end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 4 \\ 9 \end{array}\right.$

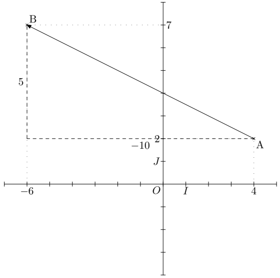
On peut lire directement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la figure en décomposant le déplacement de A à B en un déplacement horizontal et un déplacement vertical.

Notations

Dans cette présentation, on a choisi une notation verticale des coordonnées de vecteur : $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$.

On pourra utiliser une notation horizontale :
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A)$.

Distance entre 2 points



Dans un repère orthonormé, la distance AB est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - xy_A)^2}$$

Si $OI = OJ = 1cm$, le résultat sera en cm.

En pratique, il est préférable de commencer par calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dans notre exemple, $A(4;2)$ et $B(-6;7)$.

Alors, $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -6-4 \\ 7-2 \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -10 \\ 5 \end{array}\right.$

D'où $AB = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125}$

$AB = \sqrt{\mathbf{25} \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$AB = 5\sqrt{5}$.

Droites dans un repère

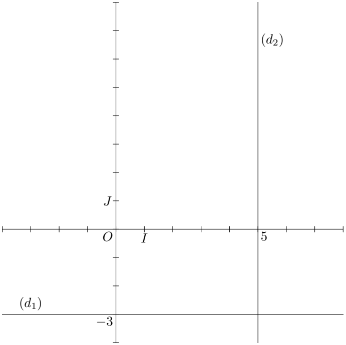
Généralités

Dans un repère, une droite est définie par son équation.
Un point est sur une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

Il y a trois catégories de droites :

- les droites horizontales ;
- les droites verticales ;
- les droites obliques.

Les droites horizontales et les droites verticales

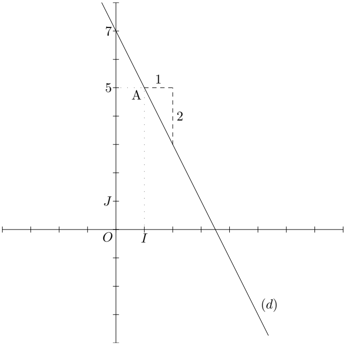


La droite horizontale (d_1) contient tous les points dont les ordonnées sont égales à -3.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_1) est $y = -3$.

La droite verticale (d_2) contient tous les points dont les abscisses sont égales à 5.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_2) est $x = 5$.

NB : ne pas confondre les abscisses avec les ordonnées.

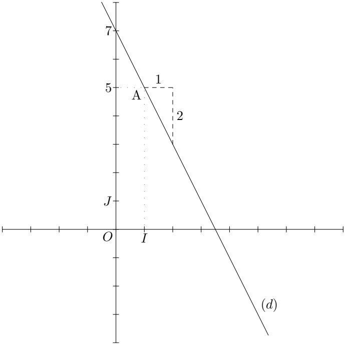
Les droites obliques



Une droite oblique a une équation pouvant s'écrire sous la forme $y = mx + p$:

- m est le coefficient directeur de la droite ;
- p est l'ordonnée à l'origine.

Etudions le droite (d) du dessin ci-contre.



La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 7, d'où l'ordonnée à l'origine $p = 7$.

Plaçons-nous sur un point de la droite (d), par exemple le point $A(5;1)$. Déplaçons nous horizontalement de **1 unité vers la droite**. Pour arriver jusqu'à la droite (d), il faut **descendre de 2 unités** : d'où le coefficient directeur $m = -2$.

La droite (d) a pour équation $y = -2x + 7$.

Propriétés des coefficients directeurs

Le coefficient directeur m de la droite oblique (AB) est donné par la formule : $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Soit la droite (d) d'équation $y = mx + p$ et (d') la droite d'équation $y = m'x + p'$.

- (d) et (d') sont parallèles si $\boxed{m = m'}$.
- (d) et (d') sont perpendiculaires si $\boxed{m \times m' = -1}$.

Application : un point est-il sur une droite ?

Enoncé

Soit la droite (d) d'équation $y = \dfrac{5}{6}x - 2$.

Les points $E(5;2)$ et $F(-6;-7)$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Solution

Vérifions si E et F sont des points de la droite (d).

$y_E = 2$

$$\frac{5}{6}x_E - 2 = \frac{5}{6} \times 5 - 2 = \frac{25}{6} - \frac{12}{6} = \frac{13}{6}$$

Comme $y_E \neq \frac{5}{6}x_E - 2$, le point E n'appartient pas à la droite (d).

$y_F = -7$

$$\frac{5}{6}x_F - 2 = \frac{5}{6} \times (-6) - 2 = -5 - 2 = -7$$

Comme $y_F = \frac{5}{6}x_F - 2$, le point F appartient à la droite (d).

NB : la figure ne permet pas de savoir si un point appartient à une droite.

Application : équation d'une droite oblique passant par deux points

Enoncé

Déterminer une équation de la droite (RS). On donne $R(-5; -2)$ et $S(4; 6)$.

Solution

Déterminons une équation de la droite (RS).

(RS) étant oblique, son équation peut s'écrire : $y = mx + p$.

Calculons m.

$$m = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R}$$

$$m = \frac{6 - (-2)}{4 - (-5)}$$

$$m = \frac{8}{9}$$

Calculons p.

$$y_R = \frac{8}{9}x_R + p$$

$$-2 = \frac{8}{9} \times (-5) + p$$

$$-\frac{18}{9} = -\frac{40}{9} + p$$

$$p = -\frac{18}{9} + \frac{40}{9}$$

$$p = \frac{22}{9}$$

D'où l'équation de la droite (RS) : $y = \frac{8}{9}x + \frac{22}{9}$.

Application : dessin d'une droite d'équation donnée

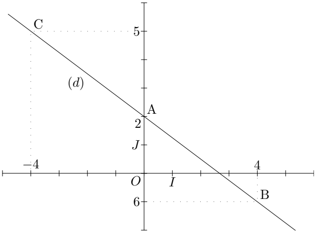
Enoncé

Tracer la droite (d) d'équation $y = -\dfrac{3}{4}x - 4$.

Commentaires

La technique consiste à trouver trois points de la droite (d) : deux points sont nécessaires , le troisième servira de vérification.
Le plus simple consiste à choisir des valeurs d'abscisses et de calculer les ordonnées correspondantes.
On essaiera de trouver autant que possible des coordonnées entières et des points suffisamment éloignés les uns des autres pour réussir un tracé précis.

Dans notre exemple, le coefficient directeur étant $-\dfrac{3}{4}$, il est judicieux d'uliser des abscisses multiples de 4 pour éliminer les fractions.

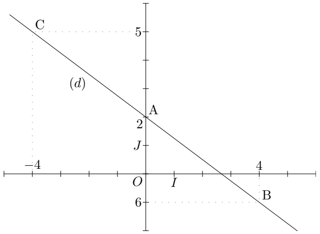


Solution :

Traçons la droite (d).

Soit A le point de (d) d'abscisse $x_A = 0$.
y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = 2$.

Soit B le point de (d) d'abscisse $x_B = 4$.
$y_B = -\frac{3}{4}x_B + 2 = -\frac{3}{4} \times 4 + 2 = -3 + 2 = -1$



La droite (d) passe par les points $A(0;2)$ et $B(3;-1)$.
Vérifions à l'aide du point C d'abscisse (-4) :

$$y_C = -\frac{3}{4}x_C + 2$$

$$y_C = -\frac{3}{4} \times (-4) + 2$$

$$y_C = 3 + 2 = 5$$

Le point $C(-4;5)$ se trouve bien sur la droite (d).

Application : intersection de deux droites

Enoncé

Soit la droite (d_1) d'équation $y = x - 2$ et la droite (d_2) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

1. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (d_1) et (d_2).
2. Vérifier la réponse précédente à l'aide d'une figure.

Solution

1. Déterminons les coordonnées de M.

   M étant le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées $M(x_M; y_M)$ vérifient le système suivant :

   $$\begin{cases} y_M = x_M - 2 & (1) \\ y_M = -\dfrac{1}{2}x_M + 4 & (2) \end{cases}$$

   D'où l'équation,

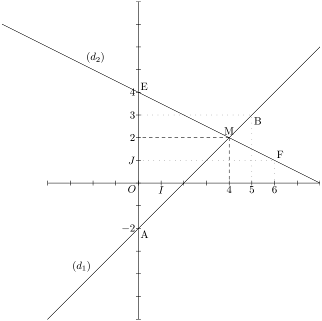
   $$x_M - 2 = -\frac{1}{2}x_M + 4$$
   $$x_M + \frac{1}{2}x_M = 4 + 2$$
   $$\frac{3}{2}x_M = 6$$
   $$x_M = 6 \times \frac{2}{3}$$
   $$x_M = 4$$

   On remplace x_M par 4 dans (1) :

   $$y_M = 4 - 2$$
   $$y_M = 2$$

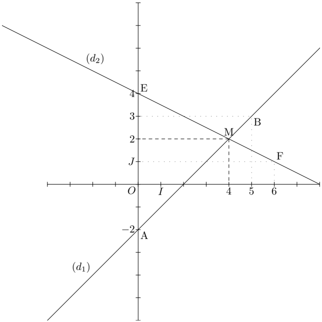
   D'où les coordonnées de $M(4; 2)$.

2. Vérifions sur la figure suivante.



Soit A le point de (d_1) d'abscisse $x_A = 0$.
y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = -2$.
Soit B le point de (d_1) d'abscisse $x_B = 5$.
$y_B = x_B - 2 = 5 - 2 = 3$

La droite (d_1) passe par les points $A(0; -2)$ et $B(5; 3)$.



Soit E le point de (d_2) d'abscisse $x_E = 0$.
y_E correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_E = 4$.
Soit F le point de (d_2) d'abscisse $x_B = 6$.

$$y_F = -\frac{1}{2}x_F + 4$$

$$y_F = -\frac{1}{2}\times 6+4 = -3+4 = 1$$

La droite (d_2) passe par les points $E(0;4)$ et $F(6,1)$.