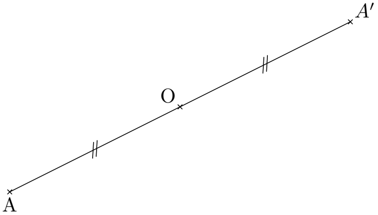
LES TRANSFORMATIONS

D. LE FUR

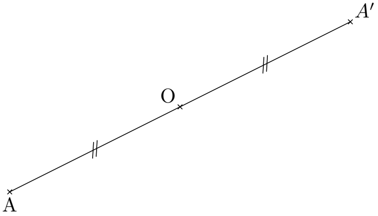
Lycée Pasteur, São Paulo

Symétrie centrale

Symétrique d'un point

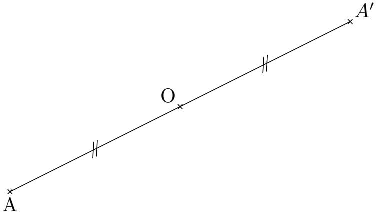


Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O est tel que O soit le milieu du segment $[AA']$.

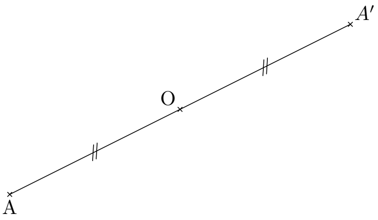
Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O est tel que O soit le milieu du segment $[AA']$.

NB : la symétrie de centre O correspond à

Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O est tel que O soit le milieu du segment $[AA']$.

NB : la symétrie de centre O correspond à une rotation de centre O et d'angle 180°.

Propriétés

Propriétés

- Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie.

Propriétés

- Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie.
- Une figure et son image sont superposables.

Propriétés

- Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie.
- Une figure et son image sont superposables.
- L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :

- on trace la demi-droite $[AO]$;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :

- on trace la demi-droite $[AO]$;
- on prend la mesure OA et on la reporte sur $[AO)$ à partir de O ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :

- on trace la demi-droite $[AO]$;
- on prend la mesure OA et on la reporte sur $[AO)$ à partir de O ;
- on efface les traits de construction ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O :

- on trace la demi-droite $[AO]$;
- on prend la mesure OA et on la reporte sur $[AO)$ à partir de O ;
- on efface les traits de construction ;
- on code les segments égaux.

Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale,

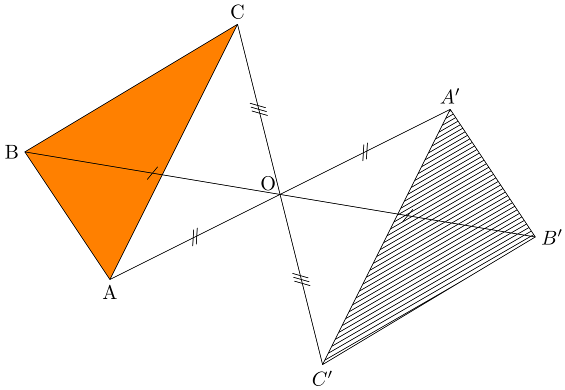
Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale,

- on construit les symétriques de chaque sommet ;

Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale,

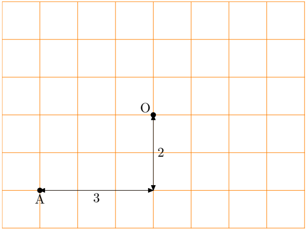
- on construit les symétriques de chaque sommet ;
- on relie les images de la même façon que les points de la figure initiale.

Exemple de symétrique d'une figure



Le dessin ci-dessus représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie de centre O.

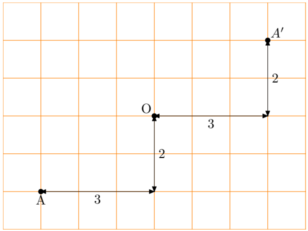
Utilisation du quadrillage



Le dessin ci-contre décrit la façon de chercher le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O.

Pour aller de A à O, on se déplace

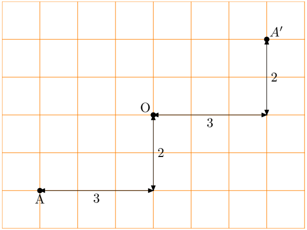
- horizontalement de 3 carreaux ;
- verticalement de 2 carreaux.



On se place en O et on effectue le déplacement précédent :

- horizontalement de 3 carreaux ;
- verticalement de 2 carreaux.

La position finale est le point A'.



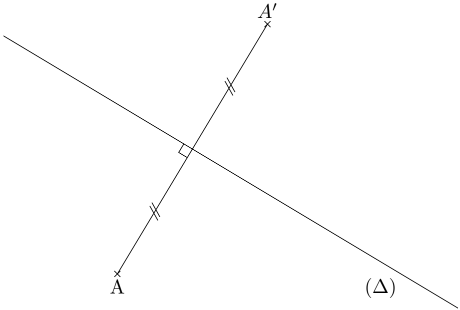
On se place en O et on effectue le déplacement précédent :

- horizontalement de 3 carreaux ;
- verticalement de 2 carreaux.

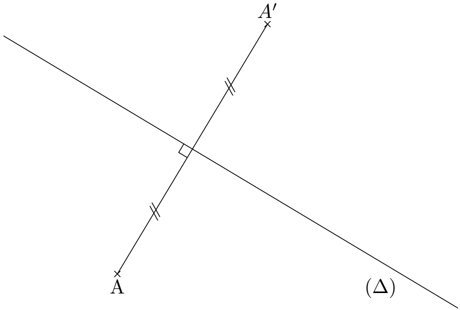
La position finale est le point A'.

NB : le comptage des carreaux se fait généralement de tête et rien ne doit être marqué sur le dessin.

Symétrique d'un point



Symétrique d'un point



Le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) est tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[AA']$.

Propriétés

Propriétés

- Une figure et son image sont superposables.

Propriétés

- Une figure et son image sont superposables.
- L'image d'un segment est un segment de même longueur mais en général non parallèle au segment initial.

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

- on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

- on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;
- on trace deux nouveaux arcs de même rayon que l'arc initial de centres E et F ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

- on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;
- on trace deux nouveaux arcs de même rayon que l'arc initial de centres E et F ;
- les deux arcs se coupent en A' ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

- on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;
- on trace deux nouveaux arcs de même rayon que l'arc initial de centres E et F ;
- les deux arcs se coupent en A' ;
- on efface les traits de constructions ;

Construction

Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

- on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;
- on trace deux nouveaux arcs de même rayon que l'arc initial de centres E et F ;
- les deux arcs se coupent en A' ;
- on efface les traits de constructions ;
- on code les segments égaux et l'angle droit.

Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie axiale,

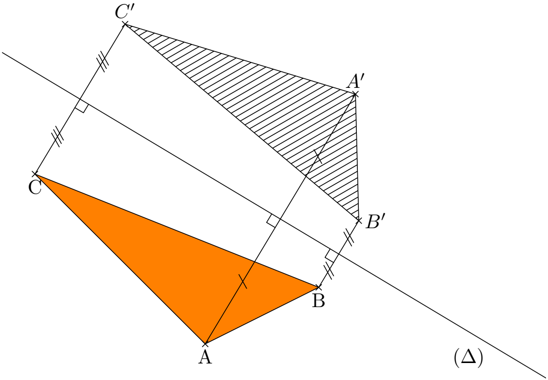
Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie axiale,

- on construit les symétriques de chaque sommet ;

Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie axiale,

- on construit les symétriques de chaque sommet ;
- on relie les images de la même façon que les points de la figure initiale.

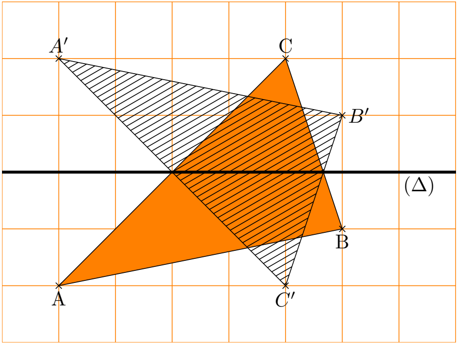
Exemple de symétrique d'une figure



Le dessin ci-contre représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie d'axe (Δ).

Utilisation du quadrillage

Dans chaque cas suivant, le dessin représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie d'axe (Δ).

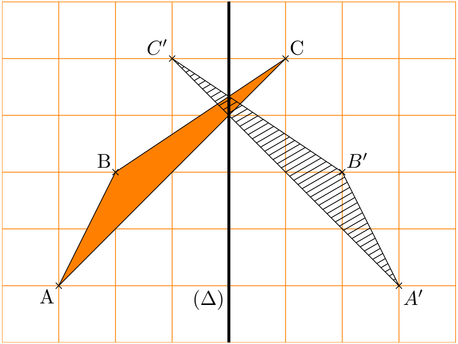


Premier cas :

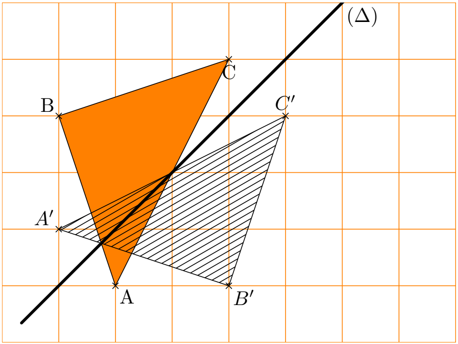
l'axe est horizontal.

Toute perpendiculaire à l'axe sera une verticale.

Ainsi, de A à l'axe, on compte deux carreaux verticalement ; de même de l'axe à A'.



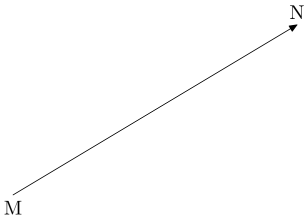
<u>Deuxième cas :</u>
l'axe est vertical.
Toute perpendiculaire à l'axe sera une horizontale.
Ainsi, de A à l'axe, on compte trois carreaux horizontalement ; de même de l'axe à A'.



Troisième cas:

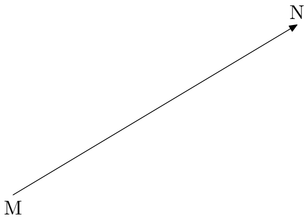
l'axe est sur une diagonale du quadrillage.
Toute perpendiculaire à l'axe sera sur l'autre diagonale du quadrillage.
Ainsi, de A à l'axe, on compte un demi carreau en diagonale ; de même de l'axe à A'.

Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

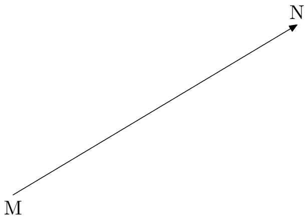
Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

- son origine : M ;

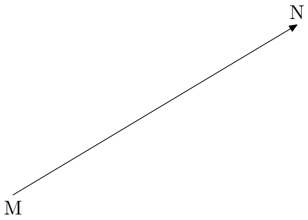
Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

- son origine : M ;
- son extrêmité : N ;

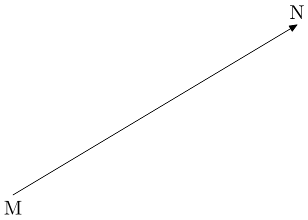
Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

- son origine : M ;
- son extrêmité : N ;
- sa norme : la longueur MN ;

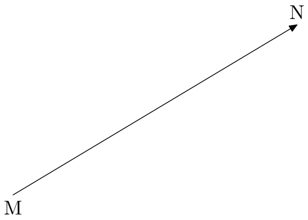
Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

- son origine : M ;
- son extrêmité : N ;
- sa norme : la longueur MN ;
- sa direction : parallèlement à la droite (MN) ;

Notion de vecteur



Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sert à préciser le déplacement (ou glissement) de M vers N.
On caractérise ce vecteur $\overrightarrow{MN}$ par :

- son origine : M ;
- son extrêmité : N ;
- sa norme : la longueur MN ;
- sa direction : parallèlement à la droite (MN) ;
- son sens : de M vers N.

Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :

Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :

- même norme ;

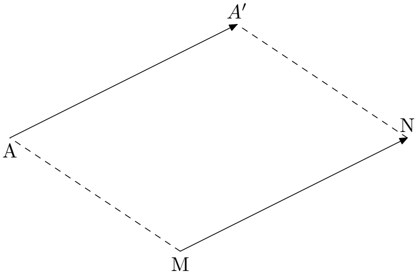
Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :

- même norme ;
- même direction ;

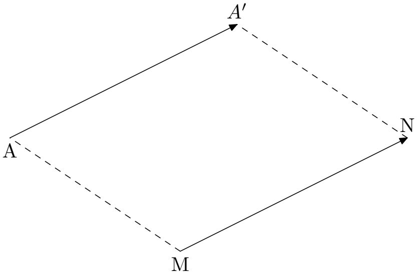
Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :

- même norme ;
- même direction ;
- même sens.

Translaté d'un point

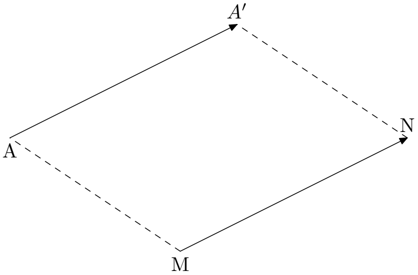


Translaté d'un point



Sans vecteurs

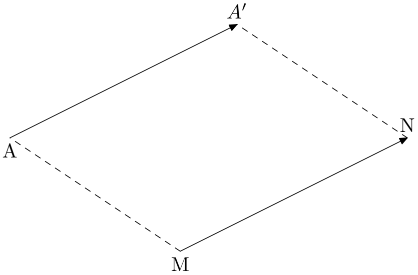
Translaté d'un point



Sans vecteurs

Le point A', image du point A dans la translation qui transforme M en N est tel que $MNA'A$ est un parallélogramme.

Translaté d'un point

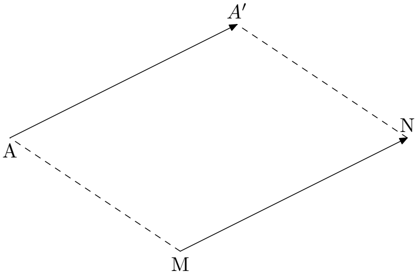


Sans vecteurs

Le point A', image du point A dans la translation qui transforme M en N est tel que $MNA'A$ est un parallélogramme.

Avec vecteurs

Translaté d'un point



Sans vecteurs

Le point A', image du point A dans la translation qui transforme M en N est tel que $MNA'A$ est un parallélogramme.

Avec vecteurs

Le point A', image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ est tel que : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$.

Propriétés

Propriétés

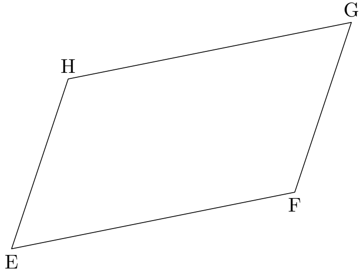
- Toutes les propriétés sont basées sur celles du parallélogramme.

Propriétés

- Toutes les propriétés sont basées sur celles du parallélogramme.
- L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

Propriétés

- Toutes les propriétés sont basées sur celles du parallélogramme.
- L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.
- Le translaté d'une figure est une figure superposable.



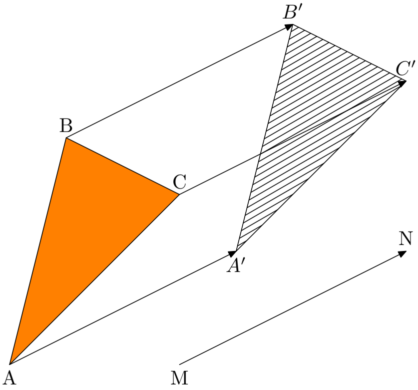
Sur la figure ci-dessus, $EFGH$ est un parallélogramme.
Alors, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et G est donc l'image de H dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
De même, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ et G est donc l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$.
Etc ...

Construction

Trois points étant placés, on termine la construction du parallélogramme $MNA'A$ de la façon suivante :

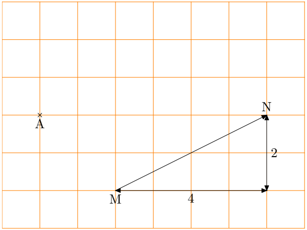
- on reporte la distance MN à partir de A (en effet $MN = AA'$) ;
- on reporte la distance MA à partir de N (en effet $MA = NA'$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point A' ;
- on efface les traits de construction ;
- on trace le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Translaté d'une figure



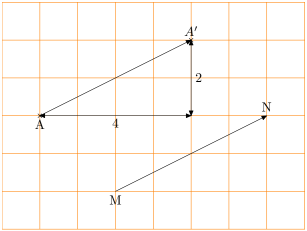
Sur la figure ci-contre, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Utilisation du quadrillage

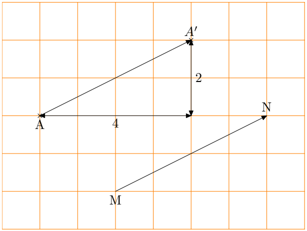


Pour trouver la position du point A', image du point A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$, on commence par décomposer le déplacement de M vers N :

- 4 carreaux horizontalement ;
- 2 carreaux verticalement.



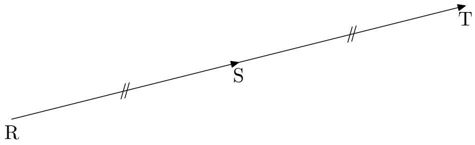
On reproduit le même déplacement en partant de A.
La position obtenue est celle du point A'.



On reproduit le même déplacement en partant de A.
La position obtenue est celle du point A'.

NB : le comptage des carreaux se fait de tête : il est inutile de marquer les détails sur la copie.

Caractérisation du milieu



Sur la figure ci-contre, les points R, S et T sont tels que $\boxed{\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{ST}}$.
Alors, S est le milieu du segment $[RT]$.

Relation de Chasles

On donne trois points D, M et C, quelconques du plan :

$$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$$

Relation de Chasles

On donne trois points D, M et C, quelconques du plan :

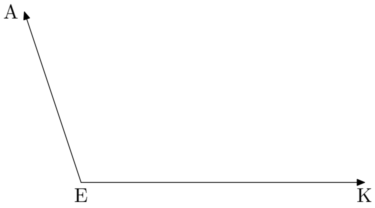
$$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$$

NB : dans la somme $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$, l'extrêmité M du premier vecteur coorespond à l'origine du second.

n peut ainsi facilement compléter les égalités suivantes sans devoir observer la position des points sur une figure :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \cdots$$
$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{S..} = \overrightarrow{RT}$$
$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{..C} = \overrightarrow{KC}$$
$$\overrightarrow{..T} + \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{EA}$$

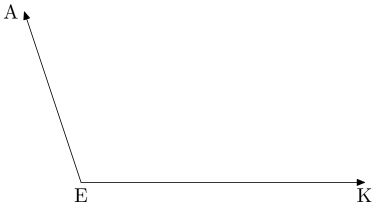
Somme de deux vecteurs de même origine



Soit trois points E, A et K du plan.
On cherche à construire le point M tel que

$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EK}$.

Somme de deux vecteurs de même origine

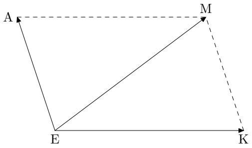


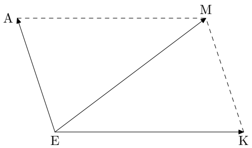
Soit trois points E, A et K du plan.
On cherche à construire le point M tel que

$$\boxed{\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EK}}.$$

NB : dans cette égalité, les trois vecteurs ont la même origine E.

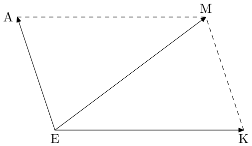
$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :





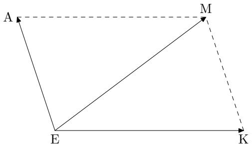
$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :

- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;



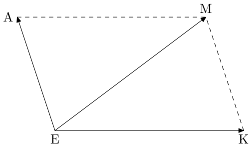
$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :

- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;
- on reporte la distance EK à partir de A (en effet $EK = AM$) ;



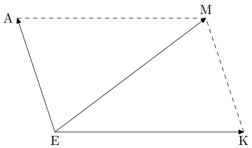
$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :

- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;
- on reporte la distance EK à partir de A (en effet $EK = AM$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point M ;



$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :

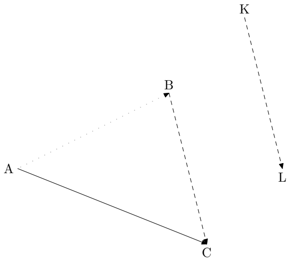
- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;
- on reporte la distance EK à partir de A (en effet $EK = AM$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point M ;
- on efface les traits de construction ;



$[EM]$ est la diagonale du parallélogramme à construire $EAMK$.
Pour chercher la position de M :

- on reporte la distance EA à partir de K (en effet $EA = KM$) ;
- on reporte la distance EK à partir de A (en effet $EK = AM$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point M ;
- on efface les traits de construction ;
- on trace le vecteur $\overrightarrow{EM}$.

Translations successives



La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

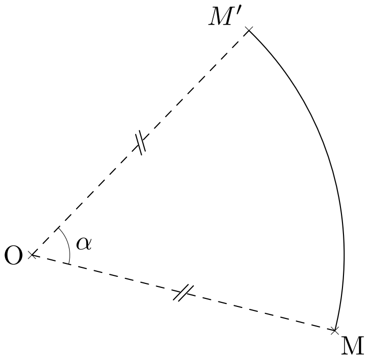
Pour cela, sur la figure ci-contre, on a construit le point C image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$: d'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KL}$.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Sens positif de rotation

Le sens positif de rotation est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Image d'un point par une rotation



L'image M' du point M dans la rotation de centre O et d'angle α est tel que :

$\boxed{OM' = OM}$ et $\boxed{\widehat{MOM'} = \alpha}$.

Propriétés

Propriétés

- L'image d'un segment est un segment de même longueur.

Propriétés

- L'image d'un segment est un segment de même longueur.
- L'image d'une figure est une figure superposable.

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour cela :

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour cela :

- on trace le segment OM ;

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre.
Pour cela :

- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre.
Pour cela :

- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ tel que $\widehat{MOx} = 50°$ en faisant attention au sens de la rotation ;

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour cela :

- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ tel que $\widehat{MOx} = 50°$ en faisant attention au sens de la rotation ;
- M' est l'intersection de l'arc de cerce et de la demi-droite ;

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre.
Pour cela :

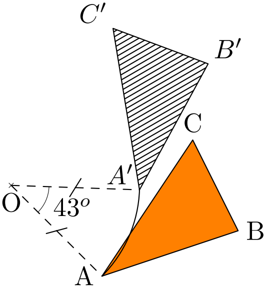
- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ tel que $\widehat{MOx} = 50°$ en faisant attention au sens de la rotation ;
- M' est l'intersection de l'arc de cerce et de la demi-droite ;
- on code les segments de même longueur et l'angle de 50° ;

Propriétés

On veut construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour cela :

- on trace le segment OM ;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation ;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ tel que $\widehat{MOx} = 50°$ en faisant attention au sens de la rotation ;
- M' est l'intersection de l'arc de cerce et de la demi-droite ;
- on code les segments de même longueur et l'angle de 50° ;
- on efface les traits de construction inutiles.

Image d'une figure



Sur la figure ci-dessus, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC dans la rotation de centre O et d'angle 43°.

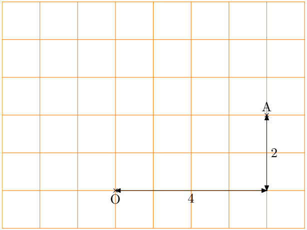
Quart de tour et rotation

Quart de tour et rotation

- Lorsque l'angle de rotation est de 180°, on parle d'un demi-tour : dans ce cas très particuliuer, la rotation est une symétrie centrale.

Quart de tour et rotation

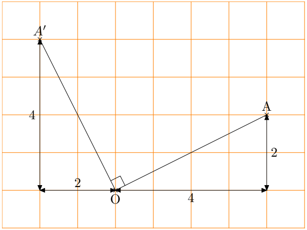
- Lorsque l'angle de rotation est de 180°, on parle d'un demi-tour : dans ce cas très particuliuer, la rotation est une symétrie centrale.
- Lorsque l'angle de rotation est de 90°, on parle de quart de tour. On peut dans ce cas utiliser le quadrillage pour construire facilement les images.



On cherche à construire le point A' image du point A dans le quart de tour de centre O, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Pour cela, on décompose le déplacement de O vers A:

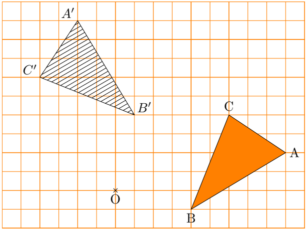
- 4 carreaux horizontalement ;
- 2 carreaux verticalement.



En partant de O, on se déplace de la façon suivante :

- 2 carreaux horizontalement à gauche ;
- 4 carreaux verticalement.

La position obtenue est celle du point A'.



La figure ci-contre montre l'image $A'B'C'$ d'un triangle ABC dans le quart de tout de centre O dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.