CALCUL NUMERIQUE

D. LE FUR

Lycée Pasteur, São Paulo

Priorités sur les opérations

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

1. Effectuer les calculs dans les parenthèses en respectant les autres règles.

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

1. Effectuer les calculs dans les parenthèses en respectant les autres règles.
2. Calculer les puissances ou les transformer.

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

1. Effectuer les calculs dans les parenthèses en respectant les autres règles.
2. Calculer les puissances ou les transformer.
3. Effectuer les multiplications et les divisions.

Règles de base

Pour calculer une expression numérique, il est impératif de respecter les étapes suivantes :

1. Effectuer les calculs dans les parenthèses en respectant les autres règles.
2. Calculer les puissances ou les transformer.
3. Effectuer les multiplications et les divisions.
4. Effectuer les additions et les soustractions (voir les nombres relatifs).

Applications

Enoncé

Calculons, en détaillant, les expressions suivantes :

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7.$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - 54 \div 6 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - 54 \div 6 + 8$

$A = 7 - 9 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - 54 \div 6 + 8$

$A = 7 - 9 + 8$

$A = -2 + 8$

Solution

$A = (4 \times 3 - 5) - (5 \times 3^2 + 9) \div 6 + 8$

$A = (12 - 5) - (5 \times 9 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - (45 + 9) \div 6 + 8$

$A = 7 - 54 \div 6 + 8$

$A = 7 - 9 + 8$

$A = -2 + 8$

$\boxed{A = 6}$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = (52 - 3) \div 7 - 21$$

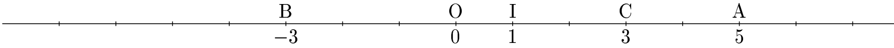
$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = (52 - 3) \div 7 - 21$$
$$B = 49 \div 7 - 21$$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = (52 - 3) \div 7 - 21$$
$$B = 49 \div 7 - 21$$
$$B = 7 - 21$$

$$B = [(5 + 2 \times 4) \times 4 - 3] \div 7 - 3 \times 7$$
$$B = [(5 + 8) \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = [13 \times 4 - 3] \div 7 - 21$$
$$B = (52 - 3) \div 7 - 21$$
$$B = 49 \div 7 - 21$$
$$B = 7 - 21$$
$$\boxed{B = -14}$$

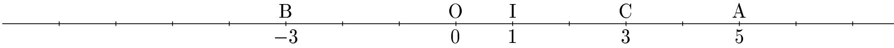
Les nombres relatifs

L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'axe gradué des nombres relatifs, on précise la position d'un point par son abscisse:

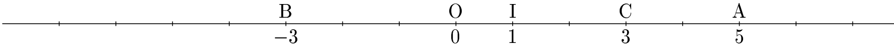
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'axe gradué des nombres relatifs, on précise la position d'un point par son abscisse:

- si le point est à droite de l'origine, son signe sera positif (+) ;

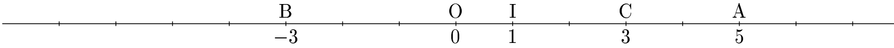
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'axe gradué des nombres relatifs, on précise la position d'un point par son abscisse:

- si le point est à droite de l'origine, son signe sera positif $(+)$;
- si le point est situé à gauche de l'origine O, son signe sera négatif $(-)$;

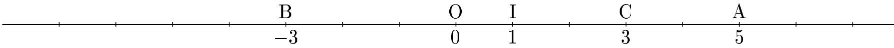
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'axe gradué des nombres relatifs, on précise la position d'un point par son abscisse:

- si le point est à droite de l'origine, son signe sera positif $(+)$;
- si le point est situé à gauche de l'origine O, son signe sera négatif $(-)$;
- la distance du point à l'origine O donne la valeur absolue de l'abscisse.

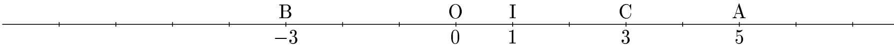
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

- le point A a pour abscisse

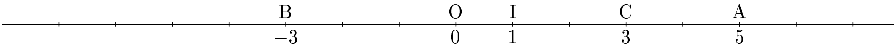
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;

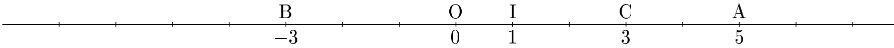
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;
- le point B a pour abscisse

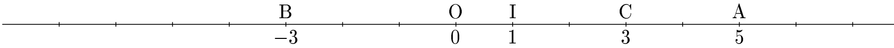
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;
- le point B a pour abscisse (-3) : on note $B(-3)$;

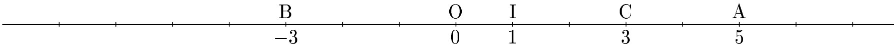
L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

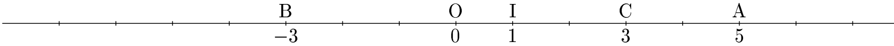
- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;
- le point B a pour abscisse (-3) : on note $B(-3)$;
- le point C a pour abscisse

L'axe gradué des nombres relatifs



Sur l'exemple ci-dessus,

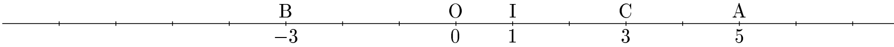
- le point A a pour abscisse $(+5)$ ou 5 : on note $A(5)$;
- le point B a pour abscisse (-3) : on note $B(-3)$;
- le point C a pour abscisse $(+3)$ ou 3 : on note $C(3)$.



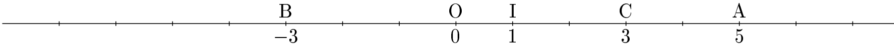
Tout nombre relatif sera défini par

- son signe positif ou négatif ;
- sa valeur absolue (distance à l'origine O).

Ainsi,
3 ou $(+3)$ est un nombre positif de valeur absolue 3. (-4) est un nombre négatif de valeur absolue 4.

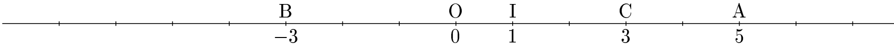


Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.



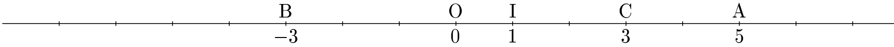
Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.
Sur notre exemple, B et C sont symétriques par rapport à O : les nombres 3 et (-3) sont opposés. Alors,

- (-3) est l'opposé de $(+3)$. On écrira : $-3 =$



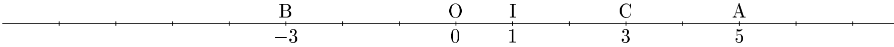
Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.
Sur notre exemple, B et C sont symétriques par rapport à O : les nombres 3 et (-3) sont opposés. Alors,

- (-3) est l'opposé de $(+3)$. On écrira : $-3 = -(+3)$.



Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.
Sur notre exemple, B et C sont symétriques par rapport à O : les nombres 3 et (-3) sont opposés. Alors,

- (-3) est l'opposé de $(+3)$. On écrira : $-3 = -(+3)$.
- 3 est l'opposé de (-3). On écrira : $3 =$



Lorsque deux points de l'axe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, leurs abscisses sont opposées.
Sur notre exemple, B et C sont symétriques par rapport à O : les nombres 3 et (-3) sont opposés. Alors,

- (-3) est l'opposé de $(+3)$. On écrira : $-3 = -(+3)$.
- 3 est l'opposé de (-3). On écrira : $3 = -(-3)$.

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :

$+(+5) =$

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :

$+(+5) = 5$
$+(-5) =$

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :

$$+(+5) = 5$$
$$+(-5) = -5$$
$$-(+5) =$$

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :

$$+(+5) = 5$$
$$+(-5) = -5$$
$$-(+5) = -5$$
$$-(-5) =$$

Utilisation des écritures simplifiées

On peut supprimer un certain nombre de parenthèses comme le montrent les exemples suivants :

$$+(+5) = 5$$
$$+(-5) = -5$$
$$-(+5) = -5$$
$$-(-5) = 5.$$

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses. Ainsi,

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses. Ainsi,

- $(-8) \times (+4)$ peut s'écrire

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses. Ainsi,

- $(-8) \times (+4)$ peut s'écrire -8×4,

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses. Ainsi,

- $(-8) \times (+4)$ peut s'écrire -8×4,
- mais $(+9) \times (-6)$ s'écrit

Par contre, il est impossible d'écrire deux signes ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) côte à côte sans les séparer par des parenthèses. Ainsi,

- $(-8) \times (+4)$ peut s'écrire -8×4,
- mais $(+9) \times (-6)$ s'écrit $9 \times (-6)$.

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :

$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) =$

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :

$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) = 8 - 4 \times 5 + 6$

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :

$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) = 8 - 4 \times 5 + 6$

$B = (-7) - (-5) + (+3) \times (-4) - (+9) =$

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :

$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) = 8 - 4 \times 5 + 6$

$B = (-7) - (-5) + (+3) \times (-4) - (+9) = -7 + 5 + 3 \times (-4) - 9$

En tenant compte des remarques précédentes, on obtient les simplifications des écritures suivantes :

$A = (+8) + (-4) \times (+5) - (-6) = 8 - 4 \times 5 + 6$

$B = (-7) - (-5) + (+3) \times (-4) - (+9) = \ -7 + 5 + 3 \times (-4) - 9$

NB : Par la suite, les explications seront données en utilisant des écritures simplifiées.

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5 ,

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9),

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3,

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3, (-4) et

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3, (-4) et 6 :

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3, (-4) et 6 :

$A =$

Additions et soustractions de nombres relatifs

Prenons l'exemple suivant : $A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6$.
A peut être interprété comme la somme des nombres relatifs 5, (-9), 3, (-4) et 6 :

$A =$ 5 -9 +3 -4 +6

Pour additionner deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on garde le signe en question. Ainsi,

$7+4 =$

Pour additionner deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on garde le signe en question. Ainsi,
$7+4 = 11$

Pour additionner deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on garde le signe en question. Ainsi,

$7+4 = 11$

$-3-4 =$

Pour additionner deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on garde le signe en question. Ainsi,

$7+4 = 11$

$-3-4 = -7$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 $+5$ $=$ $8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 $+5 =$ -3 $8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de (-8) et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 +5 = -3

-4 +10 =

$8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue* : $8 - 5 = 3$

$10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue* : $10 - 6 =$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

$$\text{-8} + 5 = \text{-3}$$

$8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

$$\text{-4} + 10 = 6$$

$10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 =$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 +5 = -3 — $8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

-4 +10 = 6 — $10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 =$

9 -6 = — $9 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *9* *et pour la valeur absolue :* $9 - 6 = 3$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

$-8 + 5 = -3$ — $8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

$-4 + 10 = 6$ — $10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 =$

$9 - 6 = 3$ — $9 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *9* *et pour la valeur absolue :* $9 - 6 = 3$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 +5 = -3

-4 +10 = 6

9 -6 = 3

5 -7 =

$8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

$10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 =$

$9 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *9* *et pour la valeur absolue :* $9 - 6 = 3$

$7 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-7)* *et pour la valeur absolue :* $7 - 5 = 2$

Pour additionner deux nombres de signes contraires, on garde le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande, et on soustrait les valeurs absolues. Ainsi,

-8 +5 = -3 — $8 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-8)* *et pour la valeur absolue :* $8 - 5 = 3$

-4 +10 = 6 — $10 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *10* *et pour la valeur absolue :* $10 - 6 =$

9 -6 = 3 — $9 > 6$: *le signe du résultat sera celui de* *9* *et pour la valeur absolue :* $9 - 6 = 3$

5 -7 = -2 — $7 > 5$: *le signe du résultat sera celui de* *(-7)* *et pour la valeur absolue :* $7 - 5 = 2$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs.
Ainsi,
$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$ 14 -13 $=$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 = 5\ \text{-}9\ +3\ \text{-}4\ +6 = 14\ \text{-}13 = 1$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$ 14 -13 $=$ 1

$B = -5 + 12 + 4 - 9 - 7 + 2 =$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs. Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$ 14 -13 $=$ 1

$B = -5 + 12 + 4 - 9 - 7 + 2 =$ -5 +12+4 -9-7 +2 $=$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs.
Ainsi,
$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 $=$ 14 -13 $=$ 1
$B = -5 + 12 + 4 - 9 - 7 + 2 =$ -5 +12+4 -9-7 +2 $=$
18 -21 $=$

Dans le cas d'une expression contenant plus de deux nombres relatifs, on pourra additionner ensemble les positifs et les négatifs.
Ainsi,

$A = 5 - 9 + 3 - 4 + 6 =$ 5 -9 +3 -4 +6 = 14 -13 = 1

$B = -5 + 12 + 4 - 9 - 7 + 2 =$ -5 +12+4 -9-7 +2 = 18 -21 = -3

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 =$

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 = 28$

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 = 28$

$(-5) \times (-4) =$

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 = 28$
$(-5) \times (-4) = 20$

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 = 28$

$(-5) \times (-4) = 20$

$\dfrac{-7}{-3} =$

Multiplications et divisions de nombres relatifs

La multiplication (ou la division) de deux nombres de même signe donne un résultat positif.

$4 \times 7 = 28$

$(-5) \times (-4) = 20$

$$\frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

La multiplication (ou la division) de deux nombres relatifs de signes contraires donne un résultat négatif.

$8 \times (-3) = -24$
$(-2) \times 7 = -14$

$$\frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$$

Plus généralement,

- si un produit contient un nombre pair de facteurs négatifs, le résultat est positif.
- si un produit contient un nombre impair de facteurs négatifs, le résultat est négatif.

Ainsi,
$A = 3 \times (-1) \times 2 \times (-1) \times (-2) = -12$
$B = 5 \times (-3) \times (-1) \times 2 \times (-2) \times (-3) = 180$

Les fractions

Définition

Une fraction A est le résultat de la division d'un numérateur par un dénominateur :

$$\boxed{A = \frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}}$$

Si le résultat de cette division est un entier, on pourra se passer de l'écriture fractionnaire :

$$B = \frac{15}{3} = 5.$$

Si le résultat de cette division n'est pas un entier, on essaiera autant que possible de simplifier cette fraction en la remplaçant par une fraction égale ayant un numérateur et un dénominateur entiers aussi petits que possible :

$$C = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$$

Egalité de deux fractions

Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un nombre non nul, on ne change pas la valeur de la fraction.

$$A = \frac{2}{3} = \frac{2 \times \mathbf{5}}{3 \times \mathbf{5}} = \frac{10}{15}$$

On utilisera cette technique pour simplifier une fraction, c'est-à-dire trouver si possible une fraction lui étant égale qui a le numérateur (et le dénominateur) entier le plus petit possible :

$$B = \frac{36}{48} = \frac{6 \times \mathbf{6}}{8 \times \mathbf{6}} = \frac{6}{8} = \frac{3 \times \mathbf{2}}{4 \times \mathbf{2}} = \frac{3}{4}.$$

$$C = \frac{54}{81} = \frac{6 \times \mathbf{9}}{9 \times \mathbf{9}} = \frac{6}{9} = \frac{2 \times \mathbf{3}}{3 \times \mathbf{3}} = \frac{2}{3}.$$

Comparaison de fractions

Deux fractions de même dénominateur (positif) sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs.

$\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ car $5 < 7$.

Si les deux fractions à comparer n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les "réduire au même dénominateur".

Enoncé

Comparons $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$.

Solution

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times \mathbf{2}}{6 \times \mathbf{2}} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times \mathbf{3}}{4 \times \mathbf{3}} = \frac{9}{12}$$

$\dfrac{10}{12} > \dfrac{9}{12}$, alors $\dfrac{5}{6} > \dfrac{3}{4}$.

Addition et soustraction

Pour additionner (resp. soustraire) deux fractions de même dénominateur, on ajoute (resp. soustrait) les numérateurs et on conserve le dénominateur.

$$A = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$B = \frac{9}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9-4}{7} = \frac{5}{7}$$

Si les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les “réduire au même dénominateur” :

$$C = \frac{5}{8} + \frac{7}{6} = \frac{5 \times \mathbf{3}}{8 \times \mathbf{3}} + \frac{7 \times \mathbf{4}}{6 \times \mathbf{4}} = \frac{15}{24} + \frac{28}{24} = \frac{15 + 28}{24} = \frac{43}{24}$$

$$D = \frac{7}{12} - 2 = \frac{7}{12} - \frac{24}{12} = \frac{7 - 24}{12} = -\frac{17}{12}$$

Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$A = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$$

Le plus souvent, une fois les produits écrits, il est préférable de les décomposer plutôt que de les effectuer en vue de simplifier le résultat :

$$B = \frac{25}{42} \times \frac{49}{40} = \frac{25 \times 49}{42 \times 40} = \frac{5 \times \mathbf{5} \times 7 \times \mathbf{7}}{6 \times \mathbf{7} \times \mathbf{5} \times 8} = \frac{5 \times 7}{6 \times 8} = \frac{35}{48}$$

Division de deux fractions

Pour obtenir l'inverse d'une fraction, on échange la place du numérateur et du dénominateur.

$\dfrac{4}{9}$ est l'inverse de $\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{1}{23}$ est l'inverse 23.

Le produit de deux nombres inverses est égal à 1 :

$$\frac{4}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{4 \times 9}{9 \times 4} = 1$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$A = \frac{3}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

$$B = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{11} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{11 \times 3} = \frac{10}{33}$$

$$C = \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6 \times 3}{5 \times 2} = \frac{18}{10} = \frac{9 \times \mathbf{2}}{5 \times \mathbf{2}} = \frac{9}{5}$$

Il faut calculer numérateur et dénominateur avant de pouvoir faire l'inversion.

Application

Enoncé

Calculer C et D et donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible :

$$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad D = \frac{\frac{8}{7} - 2}{\frac{9}{14}}$$

Conseils

Dans ce type d'exercices, il faut respecter les règles de calculs sur les fractions sous oublier les priorités sur les opérations.

Solution

$$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3 \times 5}{2 \times 12}$$

$$C = \frac{1}{4} + \frac{\mathbf{3} \times 5}{2 \times \mathbf{3} \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{2 \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{8}$$

$$C = \frac{1 \times \mathbf{2}}{4 \times \mathbf{2}} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{2+5}{8}$$

$$C = \frac{7}{8}$$

$$D = \frac{\frac{8}{7} - 2}{\frac{9}{14}} = \frac{\frac{8}{7} - \frac{14}{7}}{\frac{9}{14}} = \frac{\frac{8-14}{7}}{\frac{9}{14}} = \frac{-\frac{6}{7}}{\frac{9}{14}}$$

$$D = -\frac{6}{7} \times \frac{14}{9} = -\frac{6 \times 14}{7 \times 9} = -\frac{2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{7} \times 2}{\mathbf{7} \times 3 \times \mathbf{3}}$$

$$D = -\frac{4}{3}$$

Les racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif tel que son carré est égal à a :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Si la racine carrée d'un nombre est un entier ou une fraction, on se passera de l'écriture avec les racines :

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{0,01} = 0,1 = \dfrac{1}{10}$

Dans les autres cas, on essaiera généralement de simplifier les racines carrées, c'est-à-dire réécrire $\sqrt{a}$ sous la forme $b\sqrt{c}$ ou c est un entier le plus petit possible.

Les formules

Soit a et b deux nombres **positifs** non nuls.

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

On se sert de ces formules pour simplifier les écritures des racines en “extrayant des carrés” :

$$\sqrt{50} = \sqrt{\mathbf{25} \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{\mathbf{16} \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{98}{25}} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}} \frac{\sqrt{\mathbf{49} \times 2}}{5} = \frac{\sqrt{49} \times \sqrt{2}}{5} = \frac{7}{5}\sqrt{2}$$

Application : simplification d'expression

Enoncé

On donne : $A = 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + 8\sqrt{3}$

Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers relatilfs, b positif, le plus petit possible.

Solution

NB : Pour identifier la valeur de b, on peut chercher dans l'expression A la racine la plus "simple" qui est $\sqrt{3}$, d'où $b = 3$.

$A = 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + 8\sqrt{3}$

$A = 3\sqrt{\mathbf{25} \times 3} - \sqrt{\mathbf{9} \times 3} + 8\sqrt{3}$

$A = 3\sqrt{25} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

$A = 3 \times 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

$A = 15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

$A = 20\sqrt{3}$

Application : racines carrées, distributivité, identités remarquables

Enoncé

On donne :

$A = (3\sqrt{2} - 4)(1 + \sqrt{2})$

$B = (5\sqrt{3} + 2)^2$

$C = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$

$D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

Calculer A, B et C et D en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible.

Solution

$A = (3\sqrt{2} - 4)(1 + \sqrt{2})$

On utilise la distributivité.

$A = 3\sqrt{2} \times 1 + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 4 \times 1 - 4 \times \sqrt{2}$

$A = 3\sqrt{2} + 6 - 4 - 4\sqrt{2}$

$A = 2 - \sqrt{2}$

$B = (5\sqrt{3} + 2)^2$

On utilise : $(a + b)^2 = (a)^2 + 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$.

$B = (5\sqrt{3})^2 + 2 \times (5\sqrt{3}) \times (2) + (2)^2$

$B = 75 + 20\sqrt{3} + 4$

$B = 79 + 20\sqrt{3}$

$C = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$
On utilise : $(a - b)(a + b) = (a)^2 - (b)^2$.

$C = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$
$C = 7 - 2$
$C = 5$

$D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
On utilise : $(a - b)^2 = (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$.

$D = (\sqrt{3})^2 - 2 \times (\sqrt{3}) \times (\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2$
$D = 3 - 2\sqrt{6} + 2$
$D = 5 - 2\sqrt{6}$

Les puissances

Définitions

Soit a un nombre quelconque et n un entier positif non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Il y a deux cas bien connus :

- "a au carré" : $a^2 = a \times a$.
- "a au cube" : $a^3 = a \times a \times a$.

Enfin, un nombre à la puissance 0 est égal à 1 : $\boxed{a^0 = 1}$

La principale utilisation des puissances est le système décimal :

$10 = 10^1$	$0,1 = 10^{-1}$
$100 = 10^2$	$0,01 = 10^{-2}$
$1\,000 = 10^3$	$0,001 = 10^{-3}$
$1\,000\,000 = 10^6$	$0,000\,001 = 10^{-6}$
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$

Voici d'autres exemples d'utilisation des puissances :

$A = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$$B = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{625}$$

$C = 13^0 = 1$

Puissances d'un même nombre a

Soit a un nombre non nul.
Soient m et n, deux entiers relatifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Conseil
Pour limiter les erreurs sur les nombres relatifs, il est fortement conseillé de faire apparaître dans le détail des calculs quelle est l'opération effectuée sur les exposants (addition, soustraction ou multiplication).

D'où les exemples suivants :

$A = 7^5 \times 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$

$B = \dfrac{10^4}{10^{-3}} = 10^{4-(-3)} = 10^{4+3} = 10^7$

$C = \left(10^{-3}\right)^{-4} = 10^{(-3)\times(-4)} = 10^{12}$

Puissances de deux nombres a et b

Soient a et b deux nombres non nuls.
Soient m et n, deux entiers relatifs.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

D'où les exemples suivants :

$$A = 2^8 \times 3^8 = (2 \times 3)^8$$

$$B = \frac{15^7}{6^7} = \left(\frac{15}{6}\right)^7 = \left(\frac{5 \times \mathbf{3}}{2 \times \mathbf{3}}\right)^7 = \left(\frac{5}{2}\right)^7$$

L'écriture scientifique

Définition

Tout nombre décimal positif non nul peut s'écrire sous forme scientifique.

C'est le produit d'un nombre décimal compris entre 1 et 10 par une puiss

D'où les écritures scientifiques suivantes :

$A = 35\,000 = 3,5 \times 10^4$ *On a décalé la virgule de 4 places ver*

$B = 0,000\,048\,2 = 4,82 \times 10^{-5}$ *On a décalé la virgule de 5 places ver*

Application

Enoncé

Ecrire B sous forme d'écriture scientifique : $B = \dfrac{13 \times 10^{14} \times 10^{6}}{25 \times (10^{3})^{7}}$

Conseils

Dans ce genre d'exercices, une première étape consiste à séparer les puissances de 10 du reste à l'aide de deux fractions.
Après avoir simplifié chacune des deux fractions, il faut écrire si besoin le nombre décimal en écriture scientifique.
En multipliant les puissances de 10, on ontient le résultat cherché.

Solution

$$B = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^{6}}{25 \times (10^{3})^{7}} = \frac{13}{25} \times \frac{10^{14} \times 10^{6}}{(10^{3})^{7}} = 0,52 \times \frac{10^{14+6}}{10^{3\times 7}} =$$

$$0,52 \times \frac{10^{20}}{10^{21}} = 0,52 \times 10^{20-21}$$

$$B = 0,52 \times 10^{-1} = 5,2 \times 10^{-1} \times 10^{-1} = 5,2 \times 10^{(-1)+(-1)}$$

$$B = 5,2 \times 10^{-2}$$