L'arithmétique est la partie des mathématiques étudiant les nombres entiers.

1 Le cours

1.1 Division euclidienne

1.1.1 Définitions

La division euclidienne d'un entier a par un entier b donne deux résultats :
- un quotient q ;
- un reste r.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Alors, $a = b \times q + r$.

Si le reste de la division est nul,
- b est un diviseur de a.
- a est un multiple de b.

D'où les deux exemples suivants :

$$\begin{array}{ccc|cc} 7 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \cline{4-5} 6 & 3 & & 3 & 4 \\ & 9 & 5 & & \\ & 8 & 4 & & \\ & 1 & 1 & & \end{array}$$

Alors, $725 = 21 \times 34 + 11$.

Le reste étant non nul, 21 n'est pas un diviseur de 725.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 \\ \cline{5-6} 1 & 4 & 4 & & 4 & 3 \\ & 1 & 0 & 8 & & \\ & 1 & 0 & 8 & & \\ & & & 0 & & \end{array}$$

Alors, $1548 = 36 \times 43$.

Le reste étant nul, 36 est un diviseur de 1548.

1.1.2 Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Par exemple, 681 est divisible par 3 car $6 + 8 + 1 = 15$ (qui est divisible par 3).

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divible par 9.
Par exemple, 30 546 est divisible par 9 car $3 + 0 + 5 + 4 + 6 = 18$ (qui est divisible par 9).

Un nombre entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.

1.1.3 Liste des diviseurs d'un nombre

Pour chercher la liste des diviseurs d'un nombr entier, on utilise un tableau à deux colonnes :
- la première colonne commence par le nombre lui-même (le plus grand diviseur) ;
- la deuxième colonne commence par le nombre 1 (le plus petit diviseur).

En effet tout nombre est au moins divisible par 1 et par lui-même.

Ensuite, on essaie de compléter la deuxième colonne en cherchant les diviseurs dans l'ordre croissant. On complète alors la ligne de manière à ce que le produit des deux diviseurs de la ligne soit égal au nombre étudié.
La recherche se termine quand le diviseur trouvé a déjà été écrit dans la colonne de gauche.
Cherchons la liste des diviseurs de 24 :

24	1
12	2
8	3
6	4

Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Cherchons la liste des diviseurs de 64 :

64	1
32	2
16	4
8	8

Les diviseurs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

1.1.4 Nombres premiers

Un nombre est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Ainsi, 11 est premier mais pas 10 car $10 = 2 \times 5$.

Voici, la liste des nombres entiers inférieurs à 50 :

	1	2	3		5		7		
	11		13				17		19
			23						29
	31						37		
	41		43				47		

1.2 Diviseurs communs à deux nombres et PGCD

1.2.1 Définitions

Un nombre entier est un diviseur commun à deux nombres entiers a et b s'il divise à la fois a et b.
Ainsi, 1 est diviseur commun à tout couple de nombres.

Parmi la liste des diviseurs commun à a et b, on s'intéressera en particulier au plus grand d'entre eux : le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur noté $PGCD(a; b)$.

Cherchons la liste des diviseurs communs à 36 et 48 :

36	1
18	2
12	3
9	4
6	6

48	1
24	2
16	3
12	4
8	6

Les diviseurs communs à 36 et 48 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

1.2.2 Nombres premiers entre eux

Deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1, c'est-à-dire : $PGCD(a; b) = 1$.

Montrons que 45 et 28 sont premiers entre eux :

45	1
15	3
9	5

28	1
14	2
7	4

Le seul diviseur commun à 45 et 28 est 1 :
45 et 28 sont premiers entre eux.

1.3 Méthodes de recherche du PGCD

Lorsque les nombres sont grands, la recherche du PGCD à l'aide des tableaux de diviseurs est longue et difficile. C'est pourquoi, on a recours aux méthodes suivantes.

1.3.1 Méthode des soustractions successives

Principe Si un nombre entier divise deux nombres, il divise également leur différence.

Dans cette méthode, on utilise un tableau à trois colonnes contenant par ligne, de gauche à droite :
- le plus grand nombre ;
- le plus petit nombre ;
- leur différence.

Pour passer à la ligne suivante, on commence par placer dans l'ordre les deux derniers nombres de la ligne précédente.
Le dernier nombre non nul du tableau est le PGCD.

Cherchons par la méthode des soustractions successives le PGCD de 3 225 et 731.

a	b	$a-b$
3 225	731	2 494
2 494	731	1 763
1 763	731	1 032
1 032	731	301
731	301	430
430	301	129
301	129	172
172	129	43
129	43	86
86	43	43
43	43	0

D'où, $PGCD(3\,225; 731) = 43$.
Vérifions :
$3\,225 = \mathbf{43} \times 75$
$731 = \mathbf{43} \times 17$

1.3.2 Algorithme d'Euclide

Principe Si un nombre entier divise deux nombres, il divise également le reste de leur division euclidienne.

Dans cette méthode, on utilise un tableau à trois colonnes contenant par ligne, de gauche à droite :
- le plus grand nombre ;
- le plus petit nombre ;
- le reste de leur division euclidienne.

Pour passer à la ligne suivante, on commence par placer dans l'ordre les deux derniers nombres de la ligne précédente.
Le dernier nombre non nul du tableau est le PGCD.

Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 3 225 et 731.

a	b	r	
3 225	731	301	$3\,225 = 731 \times 4 + 301$
731	301	129	$731 = 301 \times 2 + 129$
301	129	43	$301 = 129 \times 2 + 43$
129	43	0	$129 = 43 \times 3$

D'où, $PGCD(3\,225; 731) = 43$.
Vérifions :
$3\,225 = \mathbf{43} \times 75$
$731 = \mathbf{43} \times 17$

1.3.3 Application : simplification de fraction

Enoncé
Simplifier la fraction $\dfrac{851}{2\,331}$.

Solution

Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 2 331 et 851.

a	b	r	
2 331	851	629	$2\,331 = 851 \times 2 + 629$
851	629	222	$851 = 629 \times 1 + 222$
629	222	185	$629 = 222 \times 2 + 185$
222	185	37	$222 = 185 \times 1 + 37$
185	37	0	$185 = 37 \times 5$

D'où, $PGCD(2\,331; 851) = 37$.
Vérifions :
$2\,331 = \mathbf{37} \times 63$
$851 = \mathbf{37} \times 23$

D'où la simplification :
$$\frac{851}{2\,331} = \frac{\mathbf{37} \times 23}{\mathbf{37} \times 63} = \frac{23}{63}$$

1.3.4 Application : nombres premiers entre eux

Enoncé
Montrer que les nombres 972 et 1 073 sont premiers entre eux.

Solution
Cherchons par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 1 073 et 972.

a	b	r	
1 073	972	101	$1\,073 = 972 \times 1 + 101$
972	101	163	$972 = 101 \times 9 + 163$
163	101	62	$163 = 101 \times 1 + 62$
101	62	39	$101 = 62 \times 1 + 39$
62	39	23	$62 = 39 \times 1 + 23$
39	23	16	$39 = 23 \times 1 + 16$
23	16	7	$23 = 16 \times 1 + 7$
16	7	2	$16 = 7 \times 2 + 2$
7	2	1	$7 = 2 \times 3 + 1$
2	1	0	$2 = 1 \times 2$

D'où, $PGCD(1\,073; 972) = 1$.

Les nombres 1 073 et 972 sont alors premiers entre eux.

2 Les exercices

2.1 Exercices corrigés

2.1.1 Exercice 1

Enoncé

1) Calculer le PGCD de 110 et 88.

2) Un ouvrier dispose de plaques de métal de $110cm$ de longueur et de $88cm$ de largeur ; il a reçu la consigne suivante :
"Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte."
Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

3) Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque ?

Solution

1) Calculons le PGCD de 110 et 88 par l'algorithme d'Euclide.

a	b	r	
110	88	22	$110 = 88 \times 1 + 22$
88	22	0	$88 = 22 \times 4$

D'où, $PGCD(110; 88) = 22$.
Vérifions :
$110 = \mathbf{22} \times 5$
$88 = \mathbf{22} \times 4$

2) Calculons la longueur du côté d'un carré.
D'après la question précédente, $PGCD(110; 88) = 22$.
On peut alors obtenir découper des carrés de côté $22cm$.

3) Calculons le nombre de carrés par plaque.
$110 = \mathbf{22} \times 5$
$88 = \mathbf{22} \times 4$
La découpe donne cinq rangées de 4 carrés. On obtient donc 20 carrés par plaque.

2.1.2 Exercice 2

Enoncé

1) Les nombres 682 et 496 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

2) Calculer le PGCD de 682 et de 496.

3) Simplifier la fraction $\frac{682}{496}$ pour la rendre irréductible, en indiquant la méthode.

Solution

1) Montrons que les nombres 682 et 496 ne sont pas premiers entre eux.
682 et 496 étant deux nombres pairs, ils possèdent au moins 2 comme diviseur commun.
682 et 496 ne sont pas premiers entre eux.

2) Calculons le PGCD de 682 et de 496 par l'algorithme d'Euclide.

a	b	r	
682	496	186	$682 = 496 \times 1 + 186$
496	186	132	$496 = 186 \times 2 + 124$
186	124	62	$186 = 124 \times 1 + 62$
124	62	0	$124 = 62 \times 2$

D'où, $PGCD(682; 496) = 62$.
Vérifions :
$682 = \mathbf{62} \times 11$
$496 = \mathbf{62} \times 8$

3) Simplifions la fraction $\dfrac{682}{496}$.

$\dfrac{682}{496} = \dfrac{\mathbf{62} \times 11}{\mathbf{62} \times 8} = \dfrac{11}{8}$

2.2 Autres exercices

2.2.1 Exercice 3

1) Calculer le PGCD de 114 400 et 60 775.

2) Expliquer comment, sans utiliser la touche "fraction" d'une calculatrice, rendre irréductible la fraction $\dfrac{60\,775}{114\,400}$.

3) Donner l'écriture simplifiée de $\dfrac{60\,775}{114\,400}$.

2.2.2 Exercice 4

1) Démontrer que les nombres 65 et 42 sont premiers entre eux.

2) Démontrer que : $\dfrac{520}{336} = \dfrac{65}{42}$.

2.2.3 Exercice 5

On pose $M = \dfrac{20\,755}{9\,488} - \dfrac{3}{8}$.

1) Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20 755 et 9 488. On reportera avec soin sur la copie les calculs qui conduisent à D.

2) Le nombre M est-il décimal ? est-il rationnel ? Justifier.

2.2.4 Exercice 6

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

1) Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser ?

2) Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lots ?

2.2.5 Exercice 7

Un collège décide d'organiser une épreuve sportive pour tous les élèves. Les professeurs constituent le plus grand nombre possible d'équipes. Chaque équipe doit comprendre le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Sachant qu'il y a 294 garçons et 210 filles, quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut composer ? Combien y a-t-il de filles et de garçons dans chaque équipe ?

2.2.6 Exercice 8

1) Montrer que $\dfrac{36}{47}$ est une fraction irréductible.

2) Montrer que $\dfrac{216}{282}$ est égale à la fraction irréductible $\dfrac{36}{47}$.

2.2.7 Exercice 9

1) Déterminer le pgcd des nombres 108 et 135.

2) Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires.
Il veut faire des paquets de sorte que :
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

a) Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

b) Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

2.2.8 Exercice 10

On considère la fraction $\dfrac{5\,148}{1\,386}$.

1) Déterminer, par la méthode de votre choix, le pgcd des nombres 5 148 et 1 386.

2) Utiliser le résultat de la question précédente pour rendre irréductible la fraction $\dfrac{5\,148}{1\,386}$.

2.2.9 Exercice 11

1) Les nombres 756 et 441 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

2) La fraction $\dfrac{756}{441}$ est-elle irréductible ? Sinon, l'écrire sous forme irréductible en justifiant, sur la copie, par des calculs.

3) Calculer la somme : $D = \dfrac{756}{441} + \dfrac{19}{21}$.

2.2.10 Exercice 12

On considère la fraction $\dfrac{170}{578}$.

1) Montrer que cette fraction n'est pas irréductible.

2) Déterminer le PGCD des nombres 170 et 578 (faire apparaître les différentes étapes).

3) Ecire la fraction $\dfrac{170}{578}$ sous forme irréductible.