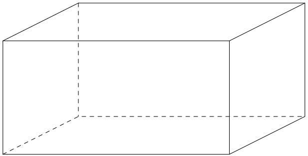
# GEOMETRIE DANS L'ESPACE

D. LE FUR

Lycée Pasteur, São Paulo

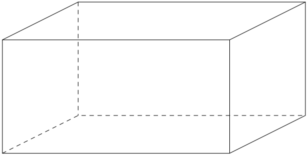
# Les pavés droits

## Généralités



Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

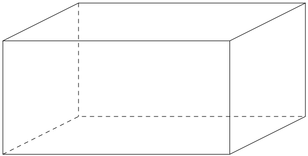
## Généralités



Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

- le haut et le bas ;

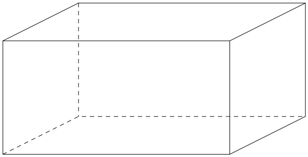
## Généralités



Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

- le haut et le bas ;
- le dessus et le dessous ;

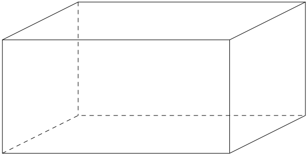
## Généralités



Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

- le haut et le bas ;
- le dessus et le dessous ;
- la droite et la gauche.

## Généralités

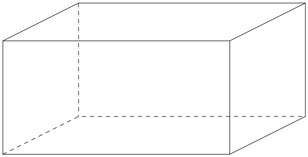


Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

- le haut et le bas ;
- le dessus et le dessous ;
- la droite et la gauche.

- Deux arêtes consécutives sont perperdiculaires.

## Généralités

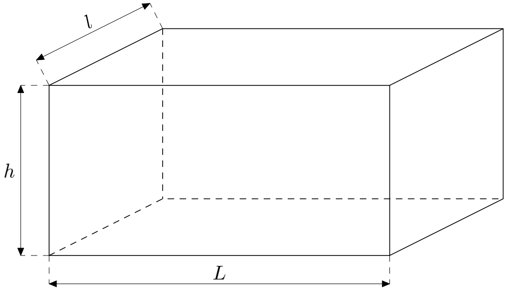


Un pavé droit comprend 6 faces rectangulaires identiques et parallèles deux à deux :

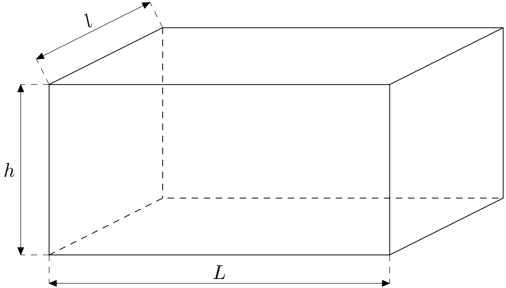
- le haut et le bas ;
- le dessus et le dessous ;
- la droite et la gauche.

- Deux arêtes consécutives sont perperdiculaires.
- Un cas particulier du pavé droit est le cube : toutes ses faces sont carrés.

# Volume



## Volume




$$\mathcal{V} = L \times l \times h$$

## Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit :

## Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit :

- des carrés,

## Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit :

- des carrés,
- des rectangles,

## Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit :

- des carrés,
- des rectangles,
- des triangles rectangles.

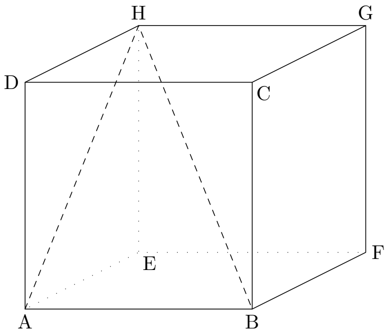
## Du pavé droit à la géométrie plane

Deux arêtes consécutives étant perperdiculaires, on extraira du pavé droit :

- des carrés,
- des rectangles,
- des triangles rectangles.

Il est vivement conseillé de dessiner pour chaque question une figure à main levée de la figure extraite.

## Application : diagonales du cube




### Enoncé

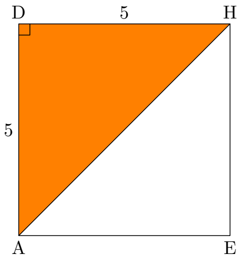
*ABCDEFGH* est un cube de côté $5cm$.

1. Calculer $AH$. On donnera sa valeur exacte.
2. Calculer $HB$. On donnera sa valeur exacte.

## Généralités

### Solution

1. Calculons $AH$ dans le carré $ADHE$.




Dans le triangle $ADH$ rectangle en $H$,
d'après le théorème de Pythagore,

$AD^2 + DH^2 = AH^2$

$5^2 + 5^2 = EG^2$

$25 + 25 = EG^2$

$EG^2 = 50$

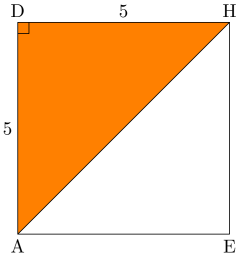
$EG = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$EG = 5\sqrt{2}$ (valeur exacte)

## Généralités

### Solution

1 Calculons $AH$ dans le carré $ADHE$.




Dans le triangle $ADH$ rectangle en $H$,
d'après le théorème de Pythagore,

$AD^2 + DH^2 = AH^2$

$5^2 + 5^2 = EG^2$

$25 + 25 = EG^2$

$EG^2 = 50$

$EG = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$EG = 5\sqrt{2}$ (valeur exacte)

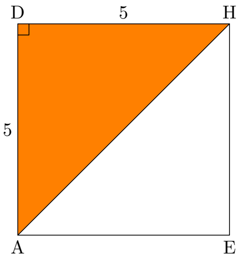
Dans le cas général d'un cube d'arête $a$,

la diagonale d'une face mesure

## Généralités

### Solution

1 Calculons $AH$ dans le carré $ADHE$.




Dans le triangle $ADH$ rectangle en $H$,
d'après le théorème de Pythagore,

$AD^2 + DH^2 = AH^2$

$5^2 + 5^2 = EG^2$

$25 + 25 = EG^2$

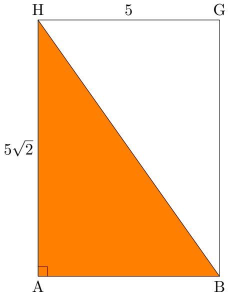
$EG^2 = 50$

$EG = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$EG = 5\sqrt{2}$ (valeur exacte)

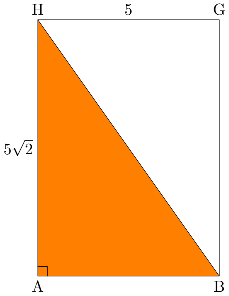
Dans le cas général d'un cube d'arête $a$,
la diagonale d'une face mesure $a\sqrt{2}$

2 Calculons $HB$ das le rectangle $ABGH$.




Dans le triangle $ABH$ rectangle en $A$,
d'après le théorème de Pythagore,
$BA^2 + AH^2 = BH^2$
$5^2 + (5\sqrt{2})^2 = BH^2$ or $(5\sqrt{2})^2 = 50$ d'après la question précédente.
$25 + 50 = BH^2$
$BH^2 = 75$
$BH = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$BH = 5\sqrt{3}$ (valeur exacte)

2 Calculons $HB$ das le rectangle $ABGH$.

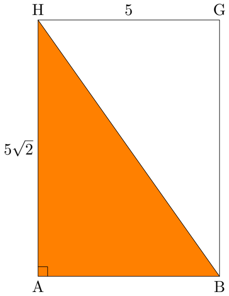



Dans le triangle $ABH$ rectangle en $A$,
d'après le théorème de Pythagore,
$BA^2 + AH^2 = BH^2$
$5^2 + (5\sqrt{2})^2 = BH^2$ or $(5\sqrt{2})^2 = 50$ d'après la question précédente.
$25 + 50 = BH^2$
$BH^2 = 75$
$BH = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$BH = 5\sqrt{3}$ (valeur exacte)

Dans le cas général d'un cube d'arête $a$,

sa grande diagonale mesure

2 Calculons $HB$ das le rectangle $ABGH$.

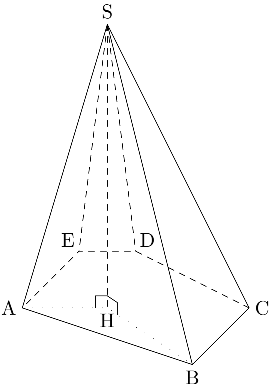



Dans le triangle $ABH$ rectangle en $A$,
d'après le théorème de Pythagore,
$BA^2 + AH^2 = BH^2$
$5^2 + (5\sqrt{2})^2 = BH^2$ or $(5\sqrt{2})^2 = 50$ d'après la question précédente.
$25 + 50 = BH^2$
$BH^2 = 75$
$BH = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$BH = 5\sqrt{3}$ (valeur exacte)

Dans le cas général d'un cube d'arête $a$,
sa grande diagonale mesure $\boxed{a\sqrt{3}.}$

# Les pyramides

## Généralités



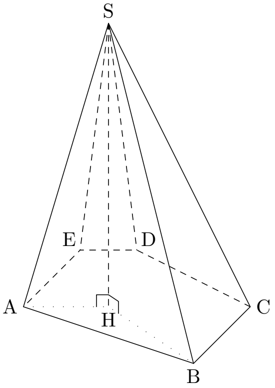

Une pyramide est définie par

- une base polygonale (triangle, quadrilatère, ...)
- un sommet $S$.

On appelle "hauteur de la pyramide" la distance $SH$ séparant le sommet de la base.

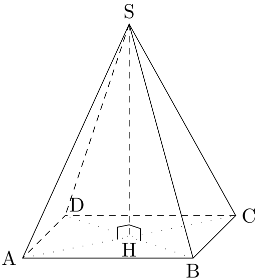
Cette pyramide $SABCDE$ a pour sommet $S$ et pour base le pentagone $ABCDE$.

# Volume




$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

## Cas d'une pyramide régulière




Une pyramide est dite régulière si

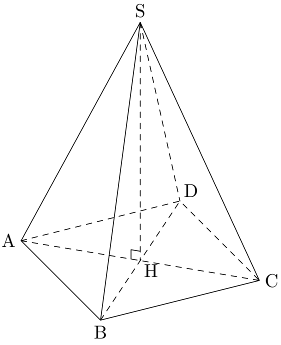
- sa base est un polygone régulier (triangle équilatéral, carré, ...)
- le pied $H$ de sa hauteur est situé au centre de sa base.

Dans ce cas, toutes les arêtes partant du sommet sont de la même longueur.

La figure ci-contre représente le cas d'une pyramide régulière $SABCD$ de sommet $S$ dont la base est le carré $ABCD$ de centre $H$.

## Première application : pyramide régulière

### Enoncé

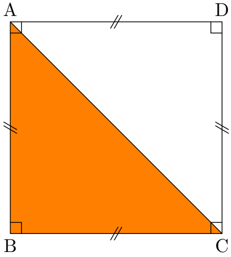



La pyramide régulière à base carrée $SABCD$ ci-contre a une base de $50cm^2$ et une arête $[SA]$ de $13cm$.

1. Calculer la valeur exacte de $AB$, puis démontrer que : $AC = 10cm$.
2. Soit $H$ le centre de $ABCD$. On admet que $(SH)$ est perpendiculaire à $(AC)$. Démontrer que : $SH = 12cm$, puis calculer le volume de $SABCD$.

## Solution

1. Calculons $AB$ puis $AC$.




Commençons par calculer $AB$.

$ABCD$ est un carré de côté $AB$ et d'aire $50cm^2$, d'où

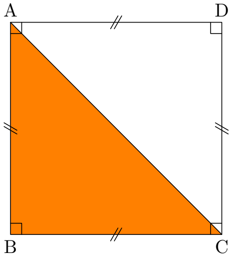
$AB^2 = 50$

$AB = \sqrt{50}$

$AB = \sqrt{25 \times 2}$

$AB = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

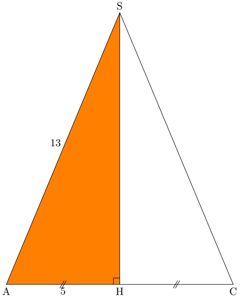
$\boxed{AB = 5\sqrt{2}}$




Calculons $AC$.

Dans le triangle $ABC$ rectangle en $B$, d'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
$(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = AC^2$
or d'après la question précédente $(5\sqrt{2})^2 = 50$.
$50 + 50 = AC^2$
$AC^2 = 100$
$AC = \sqrt{100}$
$\boxed{AC = 10}$

2. Calculons $SH$




La pyramide étant régulière,le triangle $SAC$ est donc isocèle de sommet principal $S$.

$H$ est le milieu de $[AC]$ d'où $AH = 5$.

Dans le triangle $SAH$ rectangle en $H$,

d'après le théorème de Pythagore,

$SH^2 + HA^2 = SA^2$

$SH^2 + 5^2 = 13^2$

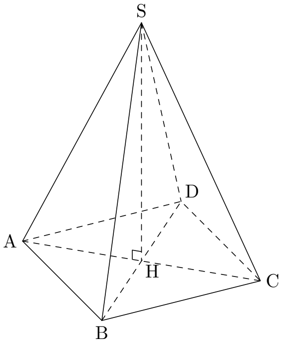
$SH^2 + 25 = 169$

$SH^2 = 169 - 25$

$SH^2 = 144$

$SH = \sqrt{144}$

$\boxed{SH = 12}$




D'où le volume de la pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SH$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 50 \times 12$$

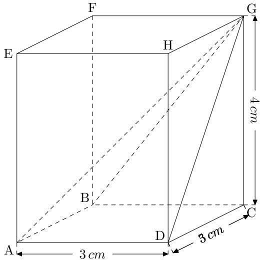
$$\boxed{\mathcal{V} = 200\ cm^3}$$

## Deuxième application : pyramide extraite d'un pavé droit

### Enoncé

$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

On donne $AD = DC = 3\,cm$; $GC = 4\,cm$; $GD = 5\,cm$. Sur le dessin ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.




1. Calculer le volume, exprimé en $cm^3$, de la pyramide $GABCD$.
2. a) Dessiner en vraie grandeur le triangle $ADG$ rectangle en $D$.

   b) Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{AGD}$ du triangle $ADG$.

   c) Calculer la valeur exacte de la longueur $AG$, puis en donner la valeur arrondie au millimètre.

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $GABCD$.

Dans cette pyramide , la base est le carré $ABCD$ et la hauteur est le segment $[GC]$, d'où

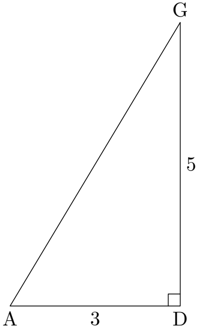
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times GC$ avec $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 3^2 = 9cm^2$

et $GC = 4cm$.

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 9 \times 4 = \dfrac{36}{3} = 12$

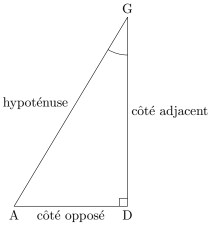
Le volume de la pyramide $GABCD$ est $\boxed{12cm^3}$.

2. a) Dessinons en vraie grandeur le triangle $ADG$.




Le triangle $ADG$ est rectangle en $D$.

b) Calculons $\widehat{AGD}$.



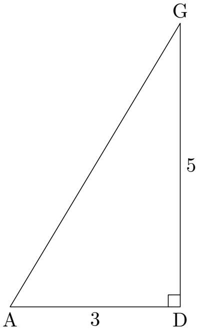

Dans le triangle $ADG$ est rectangle en $D$,

$\tan(\widehat{AGD}) = \dfrac{EF}{DF}$

$\tan(\widehat{AGD}) = \dfrac{3}{5}$

D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{AGD} = 31°}$.

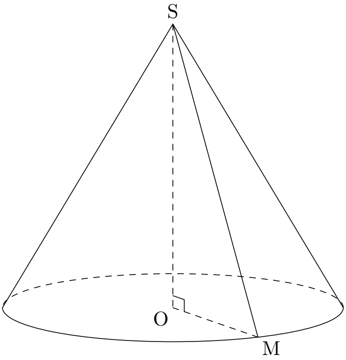
c) Calculons $AG$.




Dans le triangle $ADG$ rectangle en $D$,
d'après le théorème de Pythagore,
$A\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}G^2 = AG^2$
$3^2 + 5^2 = AG^2$
$9 + 25 = AG^2$
$AG^2 = 34$
$AG = \sqrt{34}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice, $\boxed{AG = 5,8cm}$.

# Les cônes de révolution

## Généralités

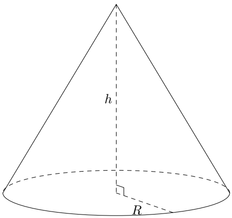



Un cône de révolution est définie par

- un disque de base ;
- un sommet $S$ situé sur la perpendiculaire au plan de base passant par le centre $O$ de cette base.

Ainsi, sur le dessin ci-contre, le triangle $SMO$ est rectangle en $O$, quel que soit le point $M$ sur le cercle de base.

## Volume




Un cône de révolution de hauteur $h$ dont la base a pour rayon $R$ a pour volume $\mathcal{V}$ :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{\text{base}} \times \text{hauteur}}$$

avec $\text{Aire}_{\text{base}} = \pi \times R \times R$.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

## Du cône de révolution à la géométrie plane

La majorité des questions de géométrie plane consisteront à travailler dans un triangle rectangle dont les sommets sont :

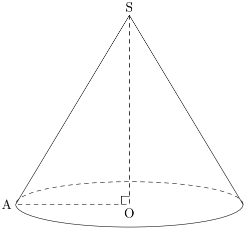
- le sommet de la pyramide ;
- le centre de la base ;
- un point du cercle de base.

Il sera encore une fois très important de dessiner un schéma à main levée du triangle en question.

## Application

### Enoncé

La figure ci-contre représente un cône de hauteur $SO = 20\,cm$ et de base le cercle de rayon $OA = 15\,cm$.

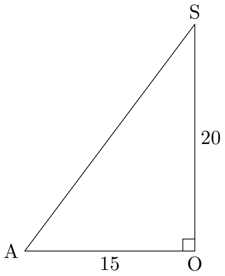



1. Calculer, en $cm^3$, le volume de ce cône; on donnera la valeur exacte sous la forme $k \times \pi$ ($k$ étant un nombre entier).
2. Montrer que $SA = 25\,cm$.
3. L'aire latérale de ce cône est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$ ($R$ désignant le rayon de la base). Calculer, en $cm^2$, cette aire ; on donnera la valeur exacte sous la forme $n\pi$ ($n$ étant un nombre entier).

## Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de ce cône.
   Ce cône a pour hauteur $SO = 20cm$ et pour rayon de base $OA = 15cm$.
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times SO \times SO \times OA$
   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 20 \times 20 \times 15$
   $\boxed{\mathcal{V} = 2000\pi}$ (valeur exacte)

2. Calculons $SA$.




Dans le triangle $SOA$ rectangle en $O$,
d'après le théorème de Pythagore,

$S\mathbf{O}^2 + \mathbf{O}A^2 = SA^2$

$20^2 + 15^2 = SA^2$

$400 + 225 = SA^2$

$SA^2 = 625$

$SA = \sqrt{625}$

D'après la calculatrice,
$\boxed{SA = 25cm}$.

3. Calculons l'aire latérale $\mathcal{A}$ de ce cône.

   On a la formule :

   $\mathcal{A} = \pi \times R \times SA$ avec $R = OA$.

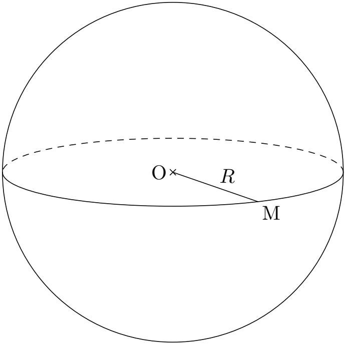
   $\mathcal{A} = \pi \times 15 \times 25$

   $\mathcal{A} = 375\pi$ (valeur exacte)

   D'après la calculatrice, $\boxed{\mathcal{A} = 1178,1 cm^2}$.

# La sphère et la boule

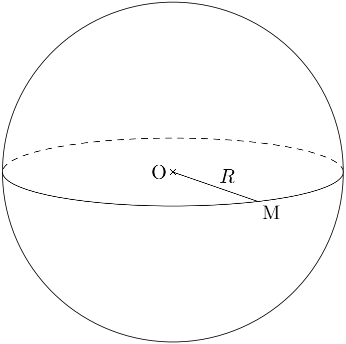
## Généralités




Une sphère est définie par son centre $O$ et son rayon $R$.
La sphère est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $OM = R$.

Une boule est définie par son centre $O$ et son rayon $R$.
La boule est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $OM \leqslant R$.

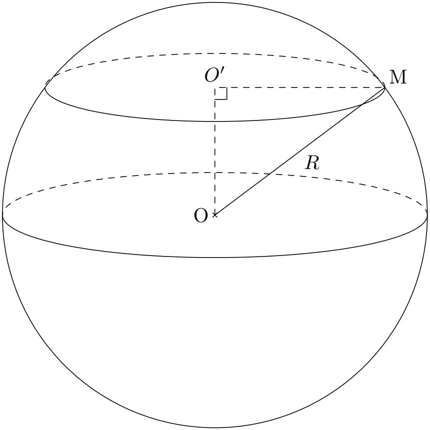
## Volume




Le volume $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon $R$ est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

## Section par un plan



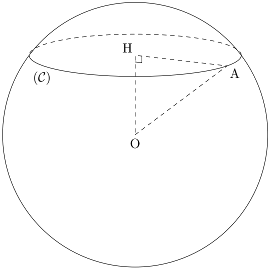

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

On sera amené à utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle $OO'M$ rectangle en $O'$.

## Application

### Enoncé

Un plan coupe une sphère de centre $O$ et de rayon $10cm$ selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre $H$.
La distance $OH$ du centre de la sphère à ce plan $P$ vaut $6cm$.




1. Calculer le volume intérieur de cette sphère. On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au $cm^3$ près.
2. En utilisant uniquement les données de l'énoncé, tracer en vraie grandeur le triangle $OHA$, rectangle en $H$. On laissera les traits de construction apparents.
3. Calculer le rayon du cercle

## Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de cette boule.

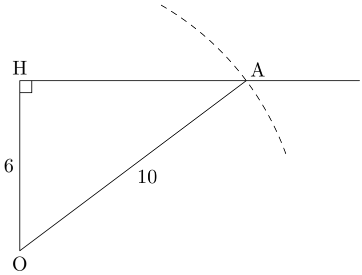
$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi 10^3$$

$$\mathcal{V} = \frac{4000\pi}{3} \text{ (valeur exacte)}$$

D'après la calculatrice, $\mathcal{V} = 4189cm^3$.

2. Voir figure suivante.




On construit dans l'ordre :

- le segment $[OH]$ ;
- l'angle droit par la demi-droite d'extrêmité $H$ ;
- l'arc de cercle de centre $O$ et de rayon $10cm$.

3. Calculons $HA$.

   Dans le triangle $OHA$ rectangle en $H$,
   d'après le théorème de Pythagore,
   $O\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}A^2 = OA^2$
   $6^2 + HA^2 = 10^2$
   $36 + HA^2 = 100$
   $HA^2 = 100 - 36$
   $HA^2 = 64$
   $HA = \sqrt{64}$
   $HA = 8cm$

# Agrandissement et réduction

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par ;

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par $k$ ;

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par $k$ ;
- les aires sont multipliées par ;

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par $k$ ;
- les aires sont multipliées par $k^2$ ;

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par $k$ ;
- les aires sont multipliées par $k^2$ ;
- les volumes sont multipliés par .

## Principe

Lors d'un agrandissement, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ supérieur à 1 appelé coefficient d'agrandissement.

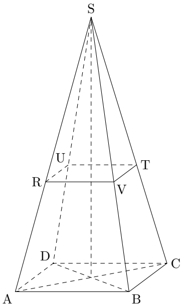
Lors d'une réduction, toutes les dimensions sont multipliées par un nombre $k$ inférieur à 1 appelé coefficient de réduction.

Dans les deux cas,

- les longueurs sont multipliées par $k$ ;
- les aires sont multipliées par $k^2$ ;
- les volumes sont multipliés par $k^3$.

## première application : pyramide régulière

**Enoncé :** $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée telle que $AB = 4,5\,cm$ et de hauteur $SH = 4,8\,cm$.




1. a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
   b) Prouver que le volume de la pyramide $SABCD$ est de $32,4\,cm^3$.
2. Le quadrilatère $RVTU$ est la section de cette pyramide par un plan parallèle à la base.
   a) Quelle est la nature de cette section ? Justifier la réponse.
   b) On rappelle que la pyramide $SRVTU$ est une réduction de la pyramide $SABCD$; on sait de plus que $SV = \dfrac{2}{3}SB$.
   Calculer le volume de $SRVTU$.
   c) Représenter la section $RVTU$ en

## Solution

1. a) Calculons l'aire du carré $ABCD$.
   $ABCD$ est un carré de côté $AB = 4,5cm$, d'où
   $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 4,5^2 = 20,25cm^2$
   b) Calculons le volume de la pyramide $SABCD$.

$$\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20,25 \times 4,8$$

$$\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20,25 \times 4,8$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{SABCD} = 32,4cm^3}$$

2. a) Déterminons la nature de la section.
   $SRVTU$ étant une réduction de la pyramide $SABCD$, la base $RVTU$ est une réduction de la base $ABCD$ : $RVTU$ est un carré.

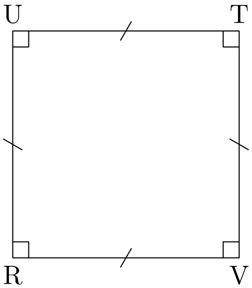
   b) Calculons le volume de la pyramide $SRVTU$.
   On sait que $SV = \frac{2}{3}SB$ : on en déduit que le coefficient de la réduction est $\frac{2}{3}$.
   D'où le volume de la pyramide $SRVTU$ :

$$\mathcal{V}_{SRVTU} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \mathcal{V}_{SABCD}$$

$$\mathcal{V}_{SRVTU} = \frac{8}{27} \times 32,4$$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\mathcal{V}_{SRVTU} = 9,6cm^3}$.

c) Dessinons le carré $RVTU$.

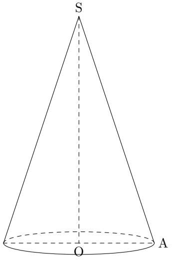



$RVTU$ est une réduction du carré $ABCD$.
Le coefficient de réduction étant $\frac{2}{3}$, on a
$RV = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 4,5$
$\boxed{RV = 3\ cm}$

## Deuxième application : cône de révolution

### Enoncé

Le cône de révolution ci-contre de sommet $S$ a une hauteur $SO$ de $9\,cm$ et un rayon de base $OA$ de $5\,cm$.




1. Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ de ce cône au $cm^3$ près.
2. Soit $M$ le point du segment $[SO]$ tel que $SM = 3\,cm$.
   On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par $M$.
   Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône de sommet $S$ ainsi obtenu au $cm^3$ près.

## Solution

1. Calculons le volume $\mathcal{V}_1$ de ce cône.
   Ce cône a pour hauteur $SO = 9cm$ et pour rayon de base $OA = 5cm$.
   $$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times R \times R \times h$$
   $$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times SO \times SO \times OA$$
   $$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 9 \times 5$$
   $\mathcal{V}_1 = 135\pi$ (valeur exacte]
   D'après la calculatrice, $\boxed{\mathcal{V}_1 = 424cm^3}$.

2. Calculons le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône.

Le petit cône est une réduction du grand cône de coefficient $\frac{SM}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, d'où

$$\mathcal{V}_2 = \left(\frac{SM}{SO}\right)^3 \times \mathcal{V}_1$$

$$\mathcal{V}_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \mathcal{V}_1$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{27} \times 135\pi$$

$\mathcal{V}_2 = 5\pi$ (valeur exacte)

D'après la calculatrice, $\boxed{\mathcal{V}_2 = 16cm^3}$.