2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Mercredi 5 mars 2014

Fonctions de plusieurs variables

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$
   (a) Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.
   (b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. (a) Dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a)\,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad\qquad b)\,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

   (b) Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a)\,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0 \qquad\qquad b)\,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$
   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.
   (b) Déterminer la différentielle de f en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
   (d) Déterminer les extrema de f.
   Pour l'étude de f au voisinage du point $(1,1)$, on pourra calculer $f(x,x)$ et $f(x,2-x)$ pour $x \in]1;1,1[$.

4. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est homogène de degré d si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f(t\,x, t\,y) = t^d f(x,y)$$

   (a) Déterminer un exemple de fonction homogène sur $\mathbb{R}^2$ de degré 1.
   (b) On suppose que f est homogène de degré d et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = d \times f(x,y)$$

   (c) On suppose que f est homogène de degré d et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\,x\,y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = d\,(d-1)f(x,y)$$

5. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$$

   On pourra poser $F(x,y) = f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ et chercher une équation différentielle simple vérifiée par F.

6. On se propose de déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

   (a) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x,y) = g(x+y, x-y)$.
   Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

7. Dans chacun des cas suivants, dire si la forme différentielle proposée est exacte sur D. Si c'est le cas, en donner une primitive.
   (a) $D = \mathbb{R}^2$ et $\omega_{(x,y)} = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$.
   (b) $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\omega_{(x,y)} = \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x\,y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.
   (c) $D = \mathbb{R}^3$ et $\omega_{(x,y,z)} = y\,z\,e^{xz}\mathrm{d}x + e^{xz}\mathrm{d}y + x\,y\,e^{xz}\mathrm{d}z$.
8. (a) Déterminer une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur l'ensemble ouvert $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$:

$$\omega_{(x,y,z)} = 2x\,z\,\varphi(z)\mathrm{d}x - 2y\,z\,\varphi(z)\mathrm{d}y + (y^2 - x^2)\varphi(z)\mathrm{d}z$$

   (b) Déterminer alors une fonction f telle que la différentielle de f soit la forme différentielle ω.
9. On considère le système d'équations différentielles :

$$(\mathcal{S})\ :\ \begin{cases} u^{'}(t) = (v(t))^2 \\ v^{'}(t) = \sin\left(u(t)\right) \end{cases}$$

   où u et v sont deux fonctions de la variable réelle t.
   (a) Déterminer les solutions constantes de $(\mathcal{S})$.
   (b) Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Écrire une condition portant sur les dérivées partielles de V pour que la fonction $t \mapsto V\left(u(t), v(t)\right)$ soit constante lorsque le couple (u, v) est solution de $(\mathcal{S})$.
   (c) Montrer que la fonction V_0 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $V_0(x, y) = \cos(x) + \frac{y^3}{3}$ vérifie la condition précédente.
   (d) On admet l'unicité de la solution (α, β) de $(\mathcal{S})$ vérifiant la condition initiale $\alpha(0) = 0$ et $\beta(0) = -\sqrt[3]{6}$. En utilisant la question précédente, donner une relation entre $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(0)$ et $\beta(0)$. En déduire l'expression de β en fonction de α.
10. Soient φ et ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
    Soit f la fonction définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par : $f(x, y) = \sqrt{xy}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy)$
    Démontrer que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.
11. Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 1)e^{x+y} + (x - 1)e^x + (y - 1)e^y$$

    On pourra exprimer f à l'aide de la fonction définie par $\varphi(t) = (t - 1)e^t + 1$.