Corrigé du devoir surveillé

Partie A Loi gamma

1. (a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall t \geqslant A, \quad \left|t^{\alpha-1}e^{-t/2} - 0\right| \leqslant \varepsilon$

   D'autre part , $\forall t > 0,\ t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$, donc en choisissant $\varepsilon = 1$,

$$\boxed{\exists A > 0 \text{ tel que } \forall t \geqslant A, \quad 0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leqslant 1}$$

   La fonction $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \geqslant A, \quad 0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t} \leqslant e^{-t/2}$ $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-t/2}\mathrm{d}t$ est convergente ; donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

   (b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t} \leqslant t^{\alpha-1}$ et $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ est convergente car $\alpha - 1 > -1$, donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

2. (a) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$ *(on reconnaît la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1).*

   (b) Soit $A > 0$, on pose $I(A, \alpha) = \displaystyle\int_0^A t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$; on observe que $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A, \alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$.

   On pose : $\begin{cases} u(t) = t^\alpha & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ $\quad u$ et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, A]$

   $I(A, \alpha) = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^A + \alpha \displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, or $\lim\limits_{A\to+\infty} u(A)v(A) = 0$ et $u(0)v(0) = 0$ *(car on peut prolonger u par continuité en 0).* Ainsi par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$,

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

   (c) Pour tout entier naturel n, $\Gamma(n + 1) = n\,\Gamma(n)$ et $\Gamma(1) = 1$, donc par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n - 1)!}$$

3. (a) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf peut-être en 0 ; ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x$

   Par le changement de variable $t = \lambda x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

   (b) Sous réserve d'existence $E(U) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x$, or $\forall x > 0$, $x\,\varphi_{n,\lambda}(x) = \dfrac{n}{\lambda}\,\varphi_{n+1,\lambda}(x)$

   donc $E(U)$ existe et vaut $E(U) = \dfrac{n}{\lambda}\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

   De même $E(U^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{(n+1)n}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+2,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \frac{(n+1)n}{\lambda^2}$

   $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \dfrac{(n+1)n}{\lambda^2} - \dfrac{n^2}{\lambda^2}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une variance et } V(U) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

4. (a) $I(1,q) = \int_0^x (x-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^q}{q}\right]_0^x = \frac{x^q}{q}$

$$\boxed{I(1,q) = \frac{x^q}{q}}$$

(b) On pose : $\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (x-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(x-t)^q}{q} \end{cases}$ u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$

$I(p,q) = \left[-t^{p-1}\frac{(x-t)^q}{q}\right]_0^x + \frac{p-1}{q} I(p-1,q+1)$

$$\boxed{I(p,q) = \frac{p-1}{q} I(p-1,q+1)}$$

(c) Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose, $H_p = \forall q \geqslant 1, I(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}$

Initialisation : H_1 est vrai d'après 4a)

Hérédité : Soit $p \geqslant 1$ tel que H_p est vrai

$I(p+1,q) = \dfrac{p}{q} I(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!}x^{p+q} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}x^{p+1+q-1}$ d'où H_{p+1} est vrai

$$\boxed{\forall p \geqslant 1, \forall q \geqslant 1, I(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}}$$

5. (a) θ est la densité de $X_p + X_q$ obtenue par le produit de convolution.

On remarque avant tout que $X_p + X_q$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc $\forall x \leqslant 0$, $\theta(x) = 0$.

Soit $x > 0$, $\theta(x) = \int_0^x \varphi_{p,\lambda}(t)\varphi_{q,\lambda}(x-t)\mathrm{d}t$ car $\varphi_{q,\lambda}(x-t) = 0$ si $t \notin [0,x]$

$\theta(x) = \dfrac{\lambda^{p+q}}{(p-1)!(q-1)!}\int_0^x t^{p-1}e^{-\lambda t}(x-t)^{q-1}e^{-\lambda(x-t)}\mathrm{d}t = \dfrac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda x}}{(p-1)!(q-1)!}I(p,q) = \dfrac{\lambda^{p+q}}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}e^{-\lambda x}$

$$\boxed{X_p + X_q \hookrightarrow \gamma(p+q,\lambda)}$$

(b) i. La loi exponentielle de paramètre λ est la loi $\gamma(1,\lambda)$

ii. Soit une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \hookrightarrow \gamma(n,\lambda)$

Initialisation : H_1 est vrai d'après 5(b)i

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que H_n est vrai

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$; S_n et U_{n+1} sont indépendantes, $S_n \hookrightarrow \gamma(n,\lambda)$ et $U_{n+1} \hookrightarrow \gamma(1,\lambda)$

D'après 5a, $S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1,\lambda)$; ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k \hookrightarrow \gamma(n,\lambda)}$$

Partie B Modélisation du passage de Bus

1. (a) i. E est définie si et seulement si $V > 0$, donc E est une variable aléatoire presque sûrement définie ; $V(\Omega) = [0,1]$ donc $E(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.

$\forall x \leqslant 0$, $P(E \leqslant x) = 0$.

Soit $x > 0$, $[E \leqslant x] = [\ln V \geqslant -\lambda x] = \left[\overline{V < \exp(-\lambda x)}\right]$, donc $P(E \leqslant x) = 1 - P(V < \exp(-\lambda x))$

Comme V est une variable aléatoire à densité, $P\left(V < \exp(-\lambda\, x)\right) = P\left(V \leqslant \exp(-\lambda\, x)\right) = e^{-\lambda\, x}$

$$\boxed{E = -\frac{1}{\lambda}\ln(V) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)}$$

ii.

```python
from math import *
from random import random
def EXPO(lamb):
    return -log(random())/lamb
```

(b)

```python
def TEMPS(lamb,n):
    T=0
    for k in range(n):
        T+=EXPO(lamb)
    return T
```

(c)

```python
def TRAFIC(lamb,t):
    T,n=0,0
    Passages=[]
    while T<t:
        DernierPassage=T
        T+=EXPO(lamb)
        n+=1
        Passages.append(T)
    return DernierPassage,T,n-1
```

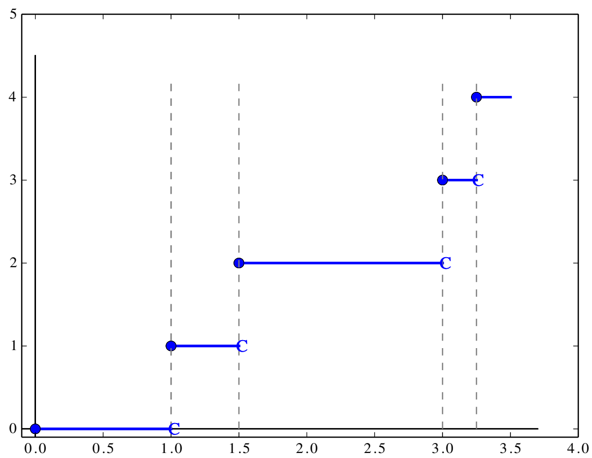
2. (a) i. $t < T_1$ si et seulement si le premier bus passe aprés l'instant t c'est à dire s'il n'y a pas de bus entre les instants 0 et t ou encore si et seulement si $N_t = 0$.

ii. Si $N_t = n$, alors il y a exactement n bus qui sont passés entre les instants 0 et t, alors le $n$ième bus passe à l'instant t ou avant et le $(n+1)$ième aprés t donc $T_n \leqslant t$ et $T_{n+1} > t$

Réciproquement si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$, alors il y a exactement n bus qui sont passés entre 0 et t.

$$\boxed{(N_t = n) = (T_n \leqslant t < T_{n+1})}$$

(b)



3. Soit $t > 0$

   (a) D'aprés la partie A, $T_n \hookrightarrow \gamma(n, \lambda)$

   (b) Si $N_t \geqslant n$ alors il y a au moins n bus qui sont passés entre les instants 0 et t, alors le $n$ième bus passe à l'instant t ou avant d'où $T_n \leqslant t$.

   Réciproquement, si $T_n \leqslant t$ alors il est passé au moins n bus entre les instants 0 et t.

   $P(N_t \geqslant n) = P(T_n \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \varphi_{n,\lambda}(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$

   (c) N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   $P(N_t = 0) = P(t < T_1) = 1 - P(U_1 \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N_t = n) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1) = \displaystyle\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \left[\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda t}$; on en déduit :

$$\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)}$$

4. (a) Si $N_t = n$, il y a alors n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (aller au terminus A). D'où la loi conditionnelle de A_t sachant $N_t = n$ est la loi binomiale de paramètres n et p, avec la convention que la loi $\mathcal{B}(0, p)$ est la loi certaine égale à 0.

$$\boxed{P_{[N_t = n]}(A_t = k) = \tbinom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{avec } q = 1 - p}$$

   (b) A_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(A_t = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{[N_t = n]}(A_t = k) P(N_t = n)$ par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$

   $P(A_t = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} (\lambda t)^n}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^n}{n!}$

   en posant le changement d'indice : $n' = n - k$

   On reconnaît une série exponentielle : $P(A_t = k) = \dfrac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda q t} = \dfrac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}$

$$\boxed{A_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p t)}$$

   Remarque : on peut montrer que $B_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q t)$ et que A_t et B_t sont indépendantes