PLANCHE : coniques

Exercice 1 : On considère une parabole de foyer F et un point M de cette parabole. Montrer que la projection orthogonale de F sur la tangente en M est située sur la tangente au sommet.

Exercice 2 : La normale et la tangente en un point M d'une parabole Γ coupent respectivement l'axe focal en N et T. Déterminer le lieu du point P tel que $NMTP$ soit un rectangle lorsque M décrit Γ. Que peut-on dire des abscisses de M et de N ?

Exercice 3 : Soit M le milieu d'une corde $[AB]$ d'une parabole, qui se projette en H sur l'axe de symétrie. Que peut-on dire de la longueur HN où N est l'intersection de cet axe et de la médiatrice de $[AB]$? Que se passe-t-il si la corde $[AB]$ est remplacée par la tangente en A ?

Exercice 4 : Deux paraboles distinctes de même axe et de même foyer F ayant un point commun M, calculer une mesure de l'angle des deux tangentes en ce point.

Exercice 5 : Démontrer que la tangente en un point M à une parabole est bissectrice de l'angle du rayon vecteur MF et de la parallèle Mx à l'axe en posant $MF = r$, $\overrightarrow{MF} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{MH} = -r\vec{i}$, où H est la projection orthogonale de M sur la directrice et $\vec{i}$ dirige l'axe des abscisses. Montrer que la projection orthogonale K de F sur cette tangente est située sur la tangente au sommet.

Exercice 6 : Un point M d'une hyperbole se projette en H et H' sur les deux asymptotes. Montrer que le produit $||\overrightarrow{MH}||||\overrightarrow{MH'}||$ est constant.

Exercice 7 : Montrer qu'une hyperbole équilatère qui contient trois points A, B et C contient également leur orthocentre.

Exercice 8 : On considère l'ellipse d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

À tout point M de l'ellipse différent des sommets, on fait correspondre le point M' symétrique par rapport à l'axe (Ox). On note P le point d'intersection de la droite (OM') avec la normale à l'ellipse en M. Déterminer le lieu du point P lorsque M décrit l'ellipse.

Exercice 9 : On considère une ellipse de grand axe (AA'). Soit M_0 un point de l'ellipse. La tangente en M_0 coupe les tangentes en A et A' aux points P et P'. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}$ est constant.

Exercice 10 : On considère une ellipse de foyers F et F' et un point M variable sur cette ellipse. On note T_M la tangente à l'ellipse au point M. Montrer que $d(F, T_M) \times d(F', T_M)$ est constante.

Exercice 11 : Déterminer le genre (ellipse, parabole, hyperbole) et les éléments caractéristiques (paramètre, excentricité, foyer(s), directrice(s), sommet(s), axe(s) et éventuellement centre, asymptotes, demi-distance focale, demi-axe focal et demi-axe non focal) des coniques définies par :

- $x^2 + 2xy + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = 0$
- $x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$
- $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 + 52x + 12\sqrt{3}y + 28 = 0$