DM 1 pour le 10 Mars 2024

*Ce DM est composé de 3 exercices, le dernier étant facultatif. Les codes doivent être envoyés au format OCaml par mail à l'adresse `vincent.maille@ac-amiens.fr`, la partie rédigée peut être tapée ou scannée. La date limite est le dernier jour des vacances : **dimanche 10 Mars à 23h59**, ainsi je pourrai vous les corriger et les rendre avant le premier DS.*

1 Pour tout le monde

Exercice 1 [**Démonstration d'un résultat informatiquement**] : on se propose de méontrer que : Les entiers égaux à la somme des cubes de leurs chiffres en écriture décimale, sont $0, 1, 153, 370, 371$ et 407

1. Montrer que si x est un tel entier alors $x \leqslant 10^4$
2. Écrire une fonction, `somme_cubes`, qui prend en paramètre un entier naturel et renvoie la somme des cubes des chiffres de ce nombre (en écriture décimale).
3. Écrire une fonction qui démontre le résultat énoncé ci-dessus.

Exercice 2 On cherche dans cet exercice une solution efficace pour calculer a^n pour deux entiers naturels a et n non simultanément nuls. On essaiera d'écrire les fonctions demandées sous forme récursive et on privilégiera les filtrages aux « `if` ».

1. Une première solution « naïve ».
   a. En vous basant sur le fait que $a^n = a \times a \times ... \times a$, écrire une fonction `puiss1` qui reçoit deux entiers naturels non simultanément nuls a et n et renvoie le résultat de a^n.
   b. On note A_n le nombre de multiplications réalisées lors de l'appel `puiss1 a n`. Exprimer (en justifiant) A_n en fonction de n.
2. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n = \begin{cases} (a^2)^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ pair} \\ a \times (a^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.
   a. Écrire une fonction `puiss2` utilisant ce principe.
   On note B_n le nombre de multiplications réalisées lors de l'appel `puiss2 a n`.
   b. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer B_{2p+1} et B_{2p} en fonction de B_p.
   c. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \log_2(n+1) \leqslant B_n \leqslant 2\log_2(n+1)$. Pour l'hérédité, on pourra raisonner par disjonction de cas selon la parité de $n+1$.
3. Démontrer que B_n est négligeable par rapport à A_n, c'est à dire que $\dfrac{B_n}{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 Exercice bonus (TD 3)

Exercice 3 Écrire une fonction `nb` qui à tout entier $n > 1$ associe le nombre de couples d'entiers $(a;b) \in [1,n]^2$ tels que a et b soient premiers entre eux. On rappelle que si $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$ où r est le reste de la division de a par b. Par exemple `nb 4` renvoie `11` car il y a 11 couples de nombres premiers entre-eux dans l'intervalle $[1;4]$:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$$

Quelques pistes pour la correction

Correction 1 1. Si n est le nombre de chiffres du nombre N, $10^{n-1} \leqslant N < 10^n$ et la somme des cubes des chiffres $S(N) \leqslant n \times 9^3 = 729n$. Donc $S(N) = N \Longrightarrow 10^{n-1} \leqslant 729n \Longrightarrow 10^{n-1} - 729n \leqslant 0$. Posons $f(x) = 10^{x-1} - 729x$, sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = \ln(10)10^{x-1} - 729$ et $f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(10)10^{x-1} - 729 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 10^{x-1} \geqslant \dfrac{729}{\ln 10} \Longleftrightarrow (x-1)\ln 10 \geqslant \ln\left(\dfrac{729}{\ln 10}\right) \Longleftrightarrow (x-1) \geqslant \dfrac{1}{\ln 10}\ln\left(\dfrac{729}{\ln 10}\right) \Longleftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{\ln 10}\ln\left(\dfrac{729}{\ln 10}\right) + 1 = \alpha \approx 3,5$. Ainsi on a le tableau suivant :

x	0		α		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
f	$\frac{1}{10}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	6355	$\nearrow$	$+\infty$

Il est donc inutile de chercher des nombres à plus de 4 chiffres.

2. Une solution utilisant la division par 10 pour récupérer le dernier chiffre du nombre :

```
let rec somme_cubes = function
        | 0 -> 0
        | n -> let u = n mod 10 in u*u*u+somme_cubes (n/10)
;;
```

ou avec une fonction `cube` auxiliaire :

```
let rec somme_cubes = function
        | 0 -> 0
        | n -> let cube x = x*x*x in cube (n mod 10) + somme_cubes (n/10)
;;
```

3. On créer une fonction qui va afficher toutes les solutions de l'intervalle $[0, n]$ en commençant par la plus grande, à chaque fois qu'une solution est trouvée, le nombre est affiché et on recommence jusqu'à arriver à -1 :

```
let rec affiche = function
   | -1 -> ()
   | n when somme_cubes n = n -> print_int n;print_newline(); affiche(n-1)
   | n -> affiche (n-1)
;;

affiche(1000);;
```

Correction 2 1. a. Une solution récursive :

```
let rec puiss1 a = function
     | 0 -> 1
     | n -> a * puiss1 a (n-1)
;;
```

b. On a $A_0 = 0$ et la relation de récurrence $A_{n+1} = 1 + A_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $A_n = n$.

2. a. En utilisant la formule, on obtient :

```
let rec puiss2 a = function
    | 0 -> 1
    | n when n mod 2 = 0 -> puiss2 (a*a) (n/2)
    | n -> a*puiss2 (a*a) (n/2)
;;
```

b. Pour $p \in \mathbb{N}$,
   - $B_{2p} = 1 + B_p$ (le carré et l'appel suivant)
   - $B_{2p+1} = 2 + B_p$ (la multiplication, le carré et l'appel suivant)

c. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\log_2(n+1) \leqslant B_n \leqslant 2\log_2(n+1)$ »
   - Pour $n = 0$, il n'y a aucune multiplication ainsi $B_0 = 0$ et puisque $\log_2 1 = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Supposons les propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$ vraies pour n fixé dans $\mathbb{N}$, alors :
     - ◇ Si $n+1$ est pair (sous la forme $n+1 = 2p$) : $Bn+1 = B_{2p} = 1 + B_p$. Or la proposition $P(p)$ est vraie donc :

$$\begin{gathered}
\log_2(p+1) \leqslant B_p \leqslant 2\log_2(p+1) \\
1+\log_2(p+1) \leqslant 1+B_p \leqslant 1+2\log_2(p+1) \\
\log_2 2+\log_2(p+1) \leqslant 1+B_p \leqslant 2\left(\log_2(p+1)+1/2\right) \\
\log_2\left(2(p+1)\right) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2(p+1)+\log_2\sqrt{2}\right) \\
\log_2(2p+2) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2\left(\sqrt{2}(p+1)\right)\right) \\
\log_2\left(2p+1\right) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2\left(\sqrt{2}p+\sqrt{2}\right)\right) \\
\log_2\left(2p+1\right) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\log_2(2p+1)^{(*)} \\
\log_2\left(n+2\right) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\log_2(n+2)
\end{gathered}$$

$(*)$: car $\sqrt{2}p+\sqrt{2} \leqslant 2p+1 \iff p \geqslant \sqrt{2}/2$ qui est vrai ici.

     - ◇ Si $n+1$ est impair (sous la forme $n+1 = 2p+1$) : $Bn+1 = B_{2p+1} = 2 + B_p$. Or la proposition $P(p)$ est vraie donc :

$$\begin{gathered}
\log_2(p+1) \leqslant B_p \leqslant 2\log_2(p+1) \\
2+\log_2(p+1) \leqslant 2+B_p \leqslant 2+2\log_2(p+1) \\
\log_2 4+\log_2(p+1) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(1+\log_2(p+1)\right) \\
\log_2(4p+4) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2+\log_2(p+1)\right) \\
\log_2(2p+2) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2(2p+2)\right) \\
\log_2(n+2) \leqslant B_{n+1} \leqslant 2\left(\log_2(n+2)\right)
\end{gathered}$$

   — Ainsi par récurrence forte $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Par le théorème d'encadrement et les croissances comparées : Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\log_2 n}{n} \leqslant \dfrac{A_n}{B_n} \leqslant 2\dfrac{\log_2 n}{n}$.

   Or $\dfrac{\log_2 n}{n} = \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{\ln n}{n} \to 0$. Ce qui prouve ce qui est demandé.

Correction 3 Voici une solution :

```
let nb n =
        let rec pgcd a b = match b with
                | 0 -> a
                | _ -> pgcd b (a mod b)
        and nbr a b = match (a,b) with
                | 1,1 -> 1
                | a,1 -> 1 + nbr (a-1) n
                | a,b when pgcd a b = 1 -> 1 + nbr a (b-1)
                | a,b -> nbr a (b-1)
        in nbr n n;;
```