

# Coût marginal

## I - Introduction de la notion

Les définitions varient selon le contexte...et les économistes qui l'utilisent. En général, c'est le coût de « production » de la dernière unité produite ou bien le coût de production d'une unité supplémentaire.



- La « production » est à prendre au sens le plus général possible : cela peut-être effectivement la production industrielle d'une voiture, mais aussi le coût occasionné par l'utilisation d'une autoroute par un camion supplémentaire, ou le coût pour un étudiant d'une année supplémentaire à l'université, etc.
- Selon qu'on parle de dernière unité produite ou d'unité supplémentaire, le calcul ne revient pas forcément au même. Ainsi, si l'on connaît le coût  $C$  en fonction de la quantité  $q$  produite, dans un cas le coût marginal est donné par

$$C_m(q) = C(q) - C(q-1)$$

et dans l'autre

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

La notion de « marginalité » s'étend également au bénéfice ou à la recette.

Le calcul du coût est un problème économique plus ou moins compliqué et discutable selon les paramètres que l'on fait intervenir. Par exemple une usine qui rejette ses déchets dans une rivière va obliger une entreprise qui utilise l'eau de cette rivière pour produire des biens alimentaires à la dépolluer ce qui va entraîner pour elle un coût *externe*. L'usine va polluer aussi l'air, réchauffer la planète, ce qui va créer un assèchement des régions sub-sahariennes, des pénuries, des maladies respiratoires, des coûts pour soins médicaux, etc. Va-t-on ou non tenir compte de ces facteurs dans le calcul du coût ? Cette question est primordiale pour modéliser le coût par une formule globale et doit être connue du « mathématicien » même si la décision ne dépend pas de lui.

Un autre problème qui implique le mathématicien mais en même temps le dépasse est l'interprétation des résultats. Par exemple, l'économiste Bertrand LEMMENNICIER traite ainsi l'absentéisme et la violence à l'école. Il détermine la courbe de coût pour un élève d'une année supplémentaire à l'école (en termes de dépenses directes mais aussi en manque à gagner puisqu'il ne peut pas travailler et toucher un salaire) et de gain d'une année d'école en plus (en termes de possibilité d'accroître sa formation et donc son salaire d'embauche). À la croisée de ces deux courbes de gain et de coût marginaux, on obtient le nombre idéal d'années de scolarité (après, les gains sont inférieurs au coût et il vaut mieux arrêter). Il conclut ainsi :

*Admettons que le nombre « optimal » d'années de scolarité pour un groupe d'élèves est 8 ans. L'âge optimal de sortie du système scolaire est donc de 14 ans. Contraindre ces élèves à poursuivre leur scolarité au-delà de 14 ans revient à leur faire supporter un coût d'opportunité en excès des gains permanents attendus. Comme par ailleurs on interdit à un employeur d'embaucher des enfants de moins de 16 ans, les élèves n'ont aucune autre solution que de fuir l'école. S'ils sont contraints d'y aller par la force, ils vont résister par la violence à un système scolaire qui les agresse. S'ils n'ont pas envie d'aller à l'école, que les employeurs légaux n'ont pas le droit de les embaucher, ils se tournent vers le marché noir et la délinquance. Supprimer la scolarité obligatoire, autoriser le travail des enfants en deçà de 16 ans et ces maux disparaîtront comme par enchantement. Evidemment la contrepartie est que sur le marché du travail des concurrents marginaux arrivent. Ces derniers sont prêts à travailler pour trois fois rien. Cette législation est faite normalement pour contraindre des jeunes et leurs familles, qui spontanément ne poursuivraient pas leur scolarité au-delà de 13 ans ou 14 ans pour diverses raisons de la faire. L'idée est que le temps passé à l'école permet à ces élèves d'accumuler des compétences qui, plus tard, leur permettront d'avoir de meilleurs salaires. (...)*

*La leçon que l'on doit retenir ici est la suivante : l'analyse marginale est un outil qui permet d'organiser rapidement la réflexion sur la question de la cessation d'une activité. On peut l'appliquer à la date optimale du divorce, de la reprise d'une activité quand on est au chômage, à la vitesse optimale sur les routes.*

Texte complet sur <http://lemennicier.bwm-mediasoft.com/article.php?ID=13&limba=fr>

Quels commentaires vous inspirent ces lignes ?

## II - Étude de deux exemples

Une usine syldave fabrique des clones d'un élève de 1<sup>ère</sup> ES idéal que les services secrets viennent de kidnapper dans un lycée français.

De savants économistes ont établi que le coût de la production de  $x$  lots de clones était donné par la formule

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$$

Déterminez la dérivée  $f'$  de  $f$  puis complétez le tableau suivant

x	1	2	3	4	10	20	100	500	1000
$f(x+1) - f(x)$									
$f(x) - f(x-1)$									
$f'(x)$									

Quels savantes pensées vous inspirent ces savants résultats ?

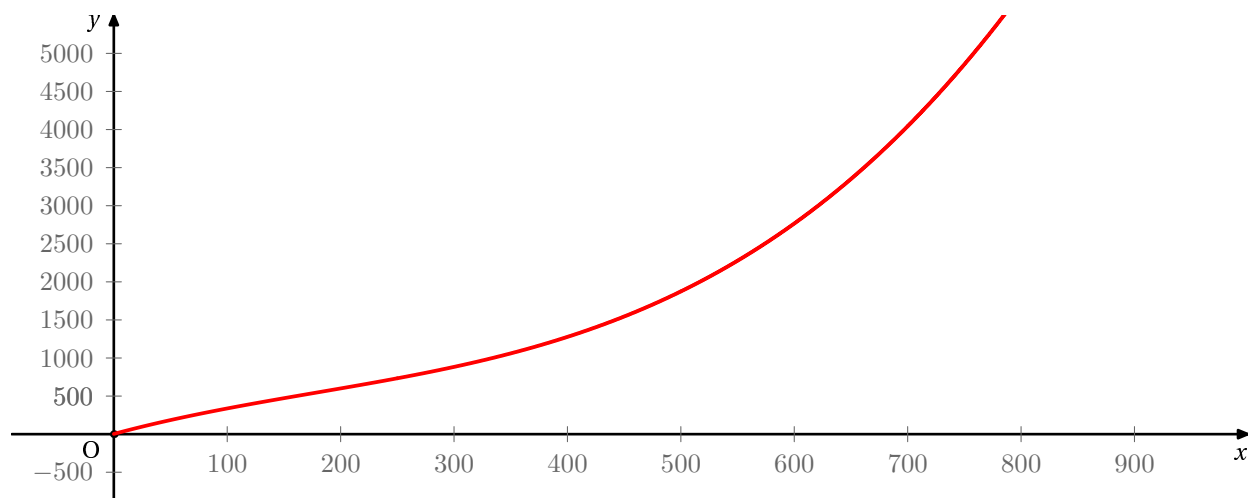
Les services secrets se sont aperçus que ces savants étaient en fait des espions bordures venus saboter l'élan scientifique du peuple syldave. Une autre équipe de scientifiques idéologiquement triés sur le volet a donc été constituée et a mis au point la formule suivante pour étudier le coût de production de  $x$  clones

$$C: \begin{array}{l} [0; 1000] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \frac{234097}{27631702280}x^3 - \frac{9807739}{1201378360}x^2 + \frac{5540124593}{1381585114}x + \frac{2071119200}{690792557} \end{array}$$

Voici le tableau complété

x	10	20	30	40	50	60	100	500	1000
$C(x) - C(x-1)$	3,857	3,701	3,550	3,404	3,264	3,128	2,637	2,196	13,081
$C(x+1) - C(x)$	3,841	3,686	3,536	3,390	3,250	3,115	2,626	2,205	13,116
$C'(x)$	3,849	3,693	3,543	3,397	3,257	3,121	2,631	2,200	13,098

Voici la représentation graphique de C



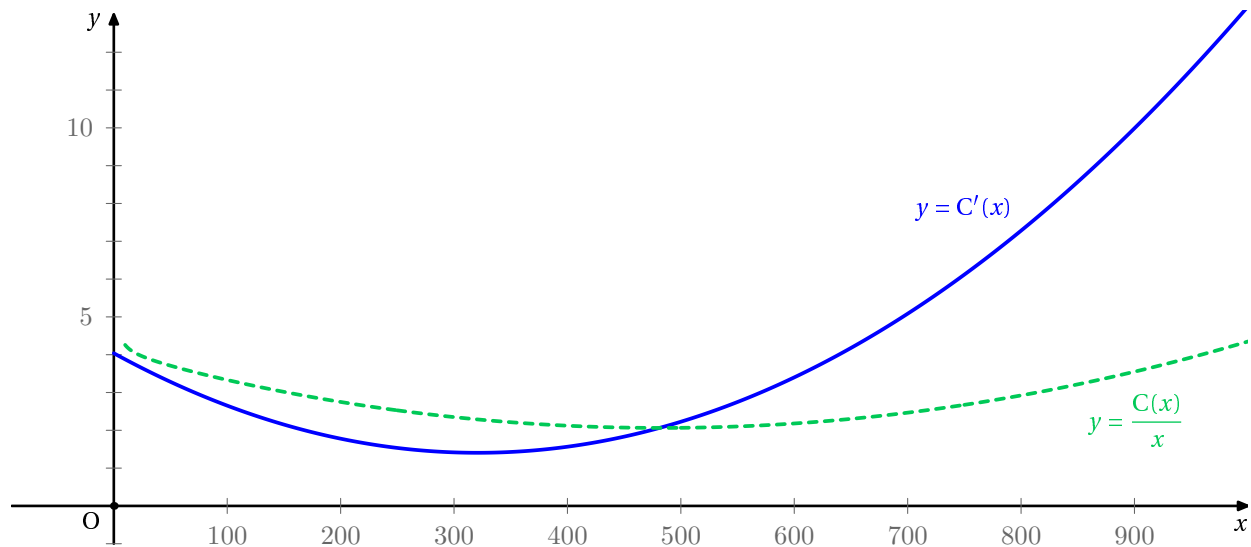
Mais le principal pour le ministère syldave de l'éducation c'est d'avoir une production rentable.

Sachant que les établissements scolaires peuvent accueillir 800 élèves de 1<sup>ère</sup> ES, quel doit être le prix de vente minimum d'un clone ? Est-ce que le ministère peut proposer des tarifs dégressifs aux chefs d'établissement ?

Comment expliquer le changement observé aux alentours de 300 unités produites ?

Le ministre syldave de l'économie ayant toujours dormi en cours de maths ne sait calculer que le coût moyen et ignore le coût marginal. Quel prix minimum propose-t-il au ministre de l'éducation pour l'achat du 800<sup>ème</sup> clone ? Aurait-il dû être plus attentif en cours de maths ?

Voici maintenant une représentation graphique du coût marginal et du coût moyen



Que pensez-vous de la propriété suivante issue du cours de micro-économie :

#### Propriété 1.1

Le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal

Notons  $C_M$  la fonction coût moyen et  $C_m$  la fonction coût marginal.

Vous commencerez par vérifier ce résultat sur le graphique, puis pour la démonstration, vous prouvez d'abord que

$$C'_M(x) = \frac{1}{x} (C'(x) - C_M(x))$$

Que peut-on en conclure ?

### III - Coût marginal et dérivée du coût total

Rappeler la définition du nombre dérivé d'une fonction  $f$  en  $x$ .

Expliquez alors pourquoi  $C(x+1) - C(x)$  « ressemble » tellement à  $C'(x)$  dans certains cas.