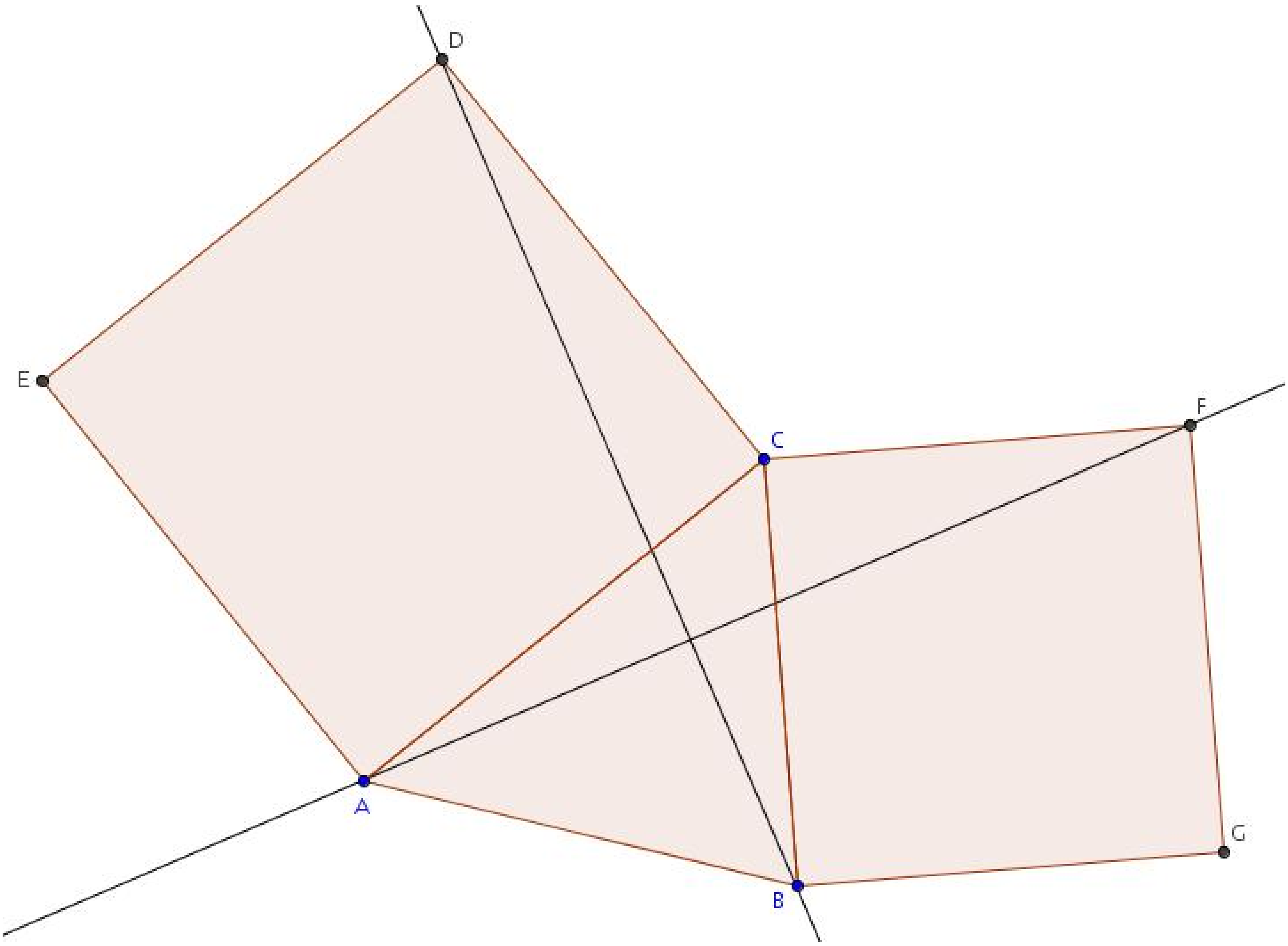
Exercice 1

ABC est un triangle de sens direct rectangle en A. On construit à l'extérieur du triangle les carrés $ACDE$ et $BCFG$.

Démontrer que les droites (BD) et (AF) sont perpendiculaires, et que $BD = AF$.

Illustration

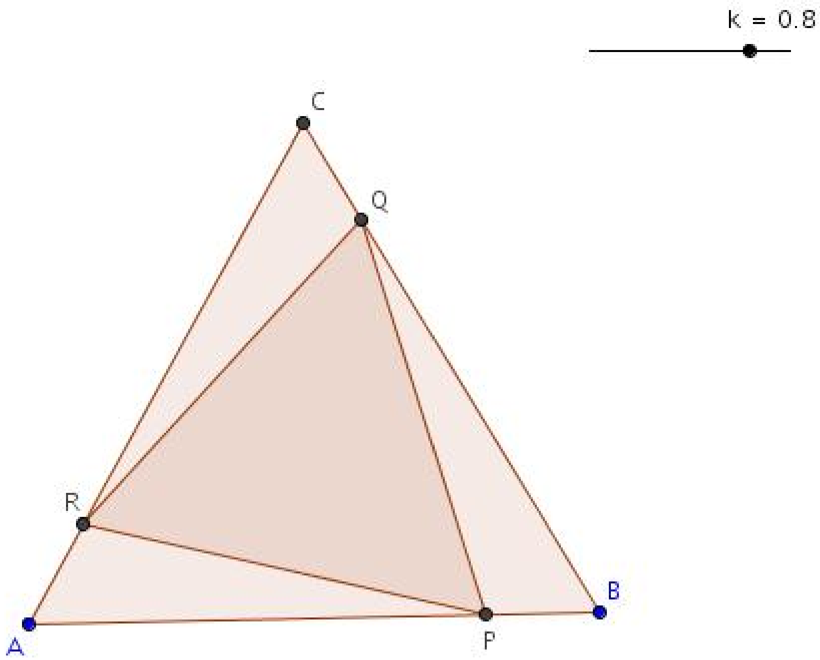


Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
On construit sur $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ les points P, Q et R tels que $AP = BQ = CR$.

Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

Illustration

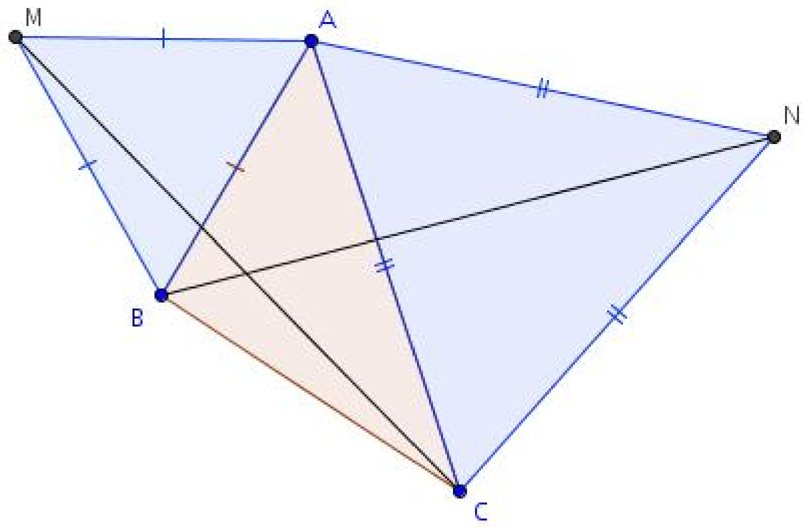


Exercice 3

ABC est un triangle de sens direct. On construit M et N tels que AMB et ACN soient équilatéraux directs.

Démontrer que $MC = NB$.

Illustration

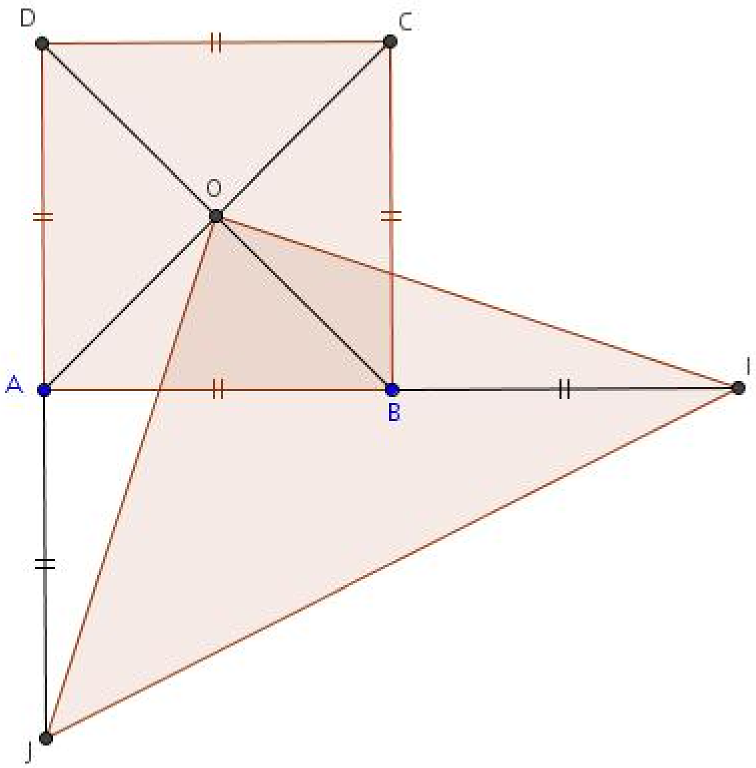


Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré de centre O de sens direct. Soient I le symétrique de A par rapport à B et J le symétrique de D par rapport à A.

Démontrer que OIJ est un triangle rectangle isocèle en O.

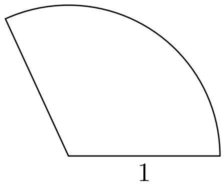
Illustration

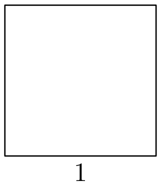


Exercice 5 L'angle de 2 radians

Soit un secteur angulaire d'angle 2 radians, de rayon 1, et un carré de côté 1.

Démontrer que ces deux domaines ont même aire et même périmètre.



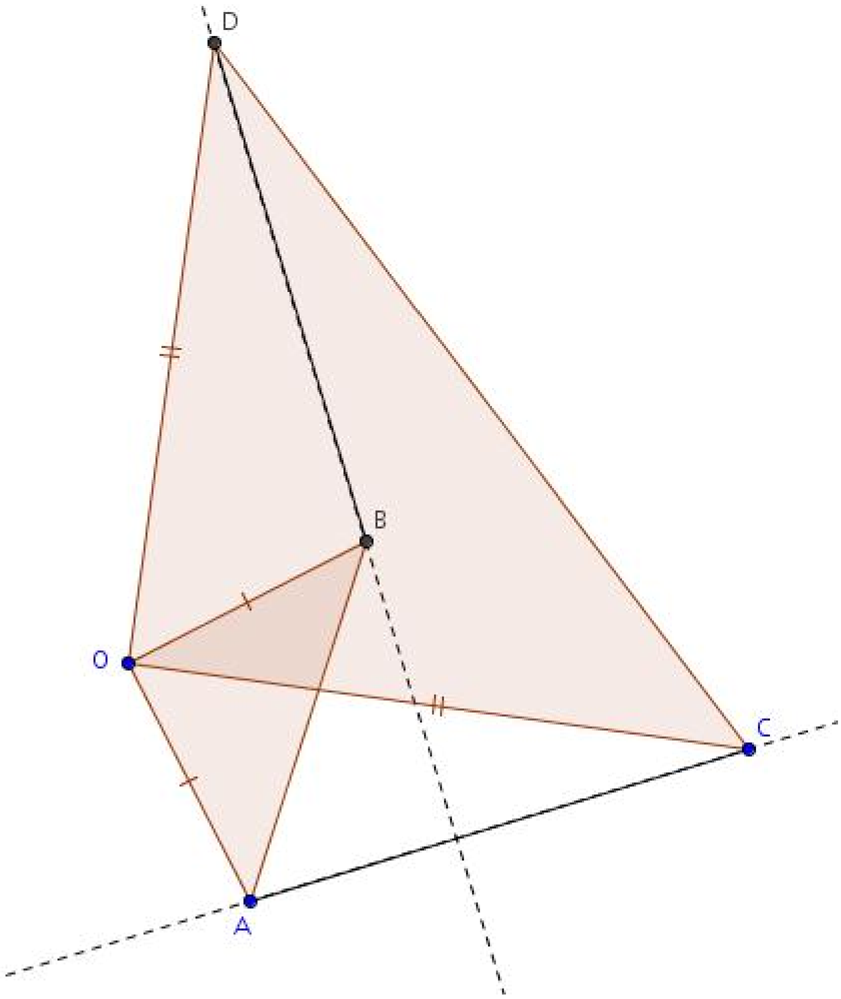


Exercice 6

OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles de sens direct.

Montrer que $AC = BD$ et que (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Illustration



Exercice 7

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sens direct, de côtés inégaux.
On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[DE]$, $[EG]$ et $[GB]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

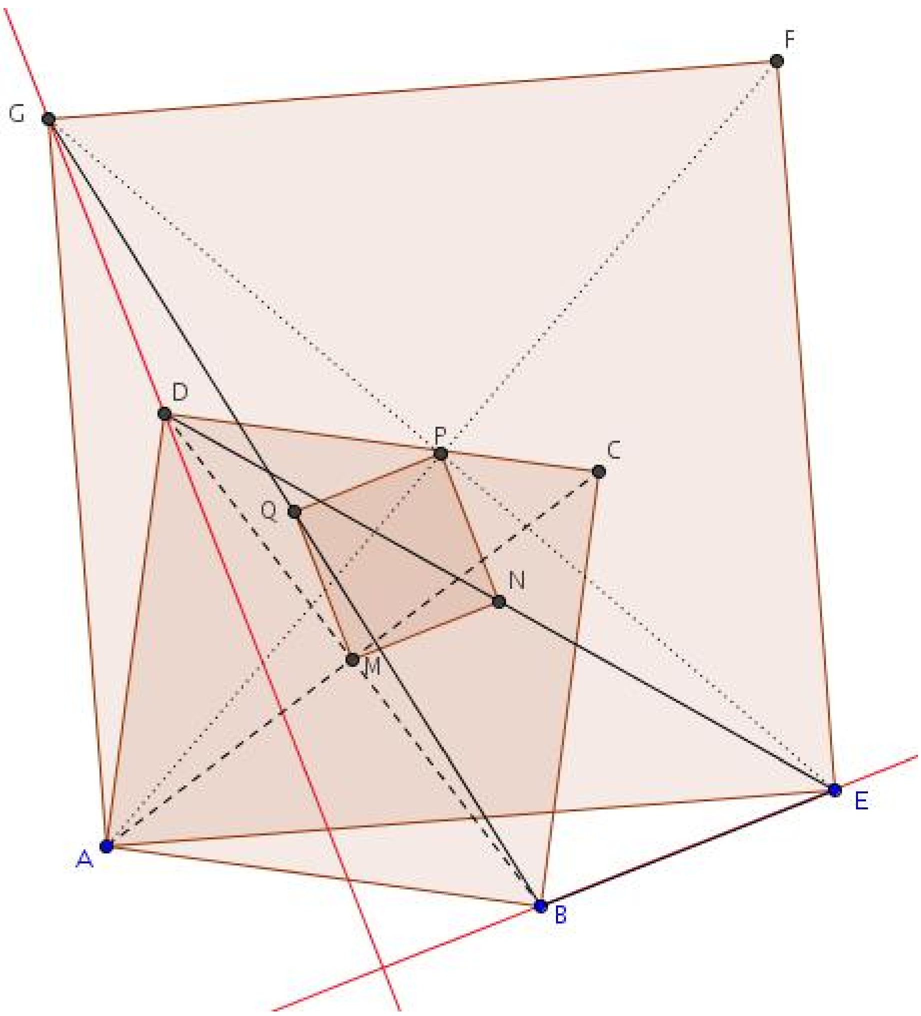
1) Faire une figure.

2) Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

3) Déterminer l'image du segment $[BE]$ par la rotation r.

4) En déduire que $MNPQ$ est un carré.

Illustration



Exercice 8

« J'habite à la campagne dans une zone en forme de triangle équilatéral dont les sommets sont 3 villages. Ma maison se trouve à vol d'oiseau à $3\ km$, $4\ km$ et $5\ km$ des 3 villages. De combien chaque village est-il distant des deux autres ? »

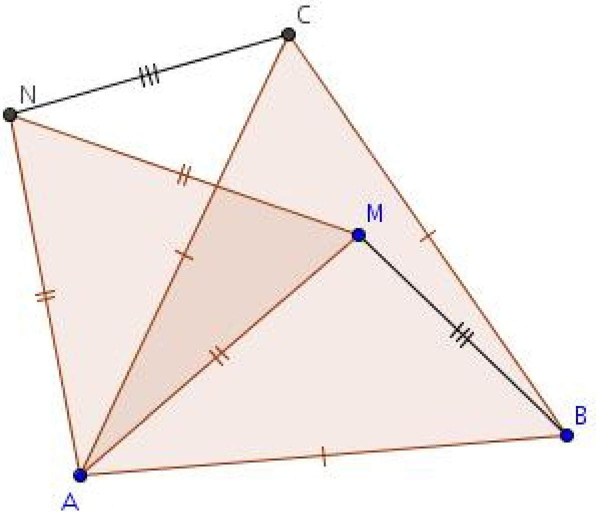
Soit M un point intérieur à un triangle équilatéral ABC direct.
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Construire $N = r(M)$.

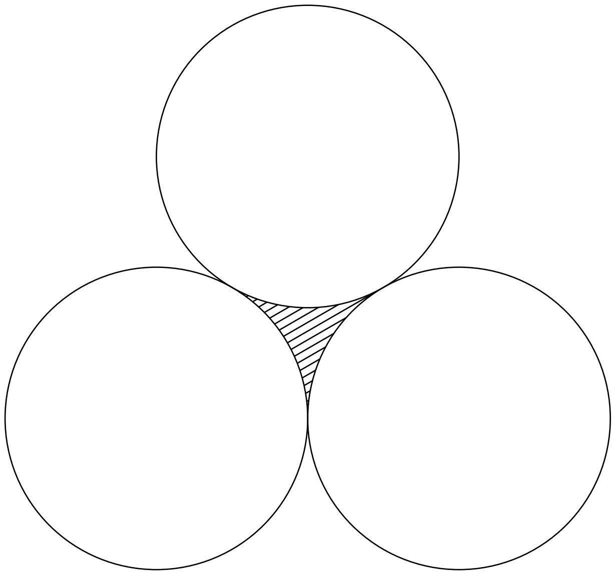
2) A l'aide des données $MA = 5$, $MB = 4$ et $MC = 3$, déterminer les longueurs du triangle CMN. En déduire sa nature.

3) A l'aide des relations métriques dans le triangle CMN, en déduire la longueur des côtés du triangle ABC.

Illustration



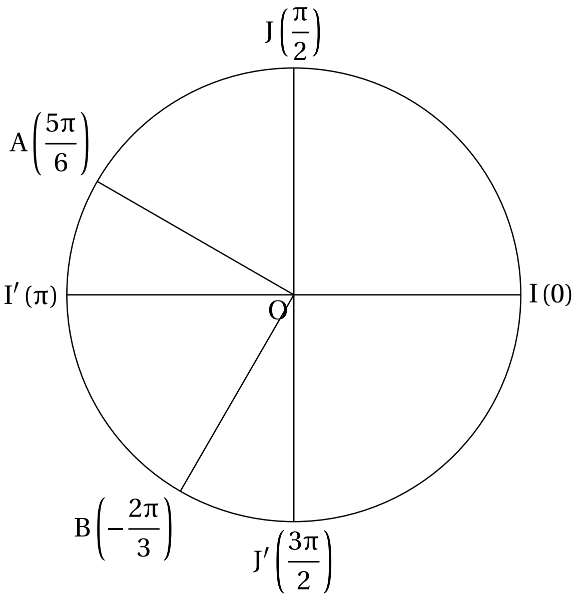
Exercice 9



Trois cercles de rayon $R = 1$ sont tangents deux à deux. Calculer l'aire hachurée comprise entre les 3 cercles.

Rappel : l'aire d'un secteur angulaire d'angle α radians et de rayon R est $A = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

Exercice 10



Sur un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$, on considère les points A et B tels que :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{5\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer les mesures principales des angles suivantes :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ'})$; $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB})$;

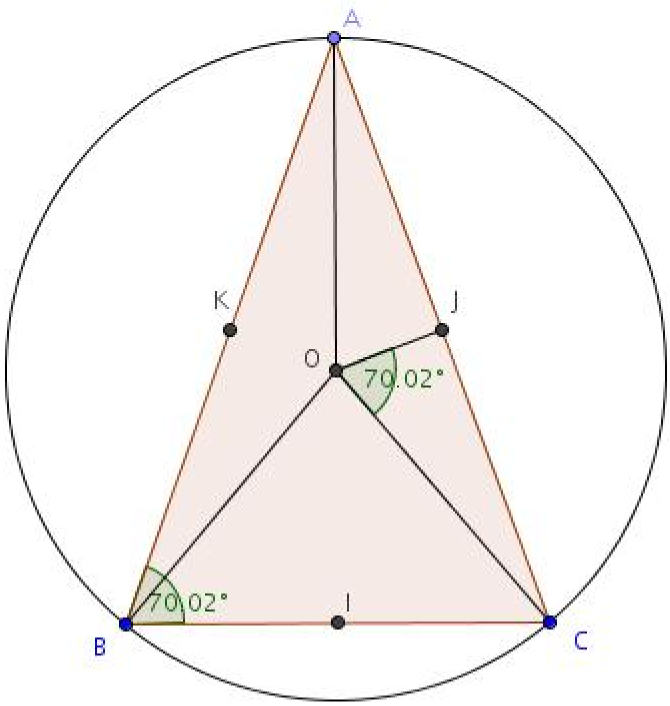
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO})$; $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO})$; $(2\overrightarrow{OA}, -3\overrightarrow{OB})$.

Exercice 11

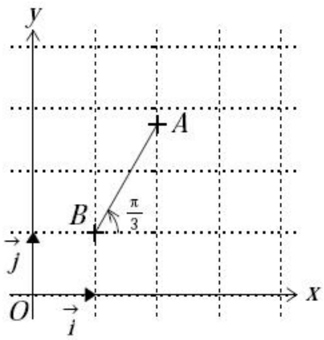
ABC est un triangle isocèle en A.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démontrer que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{JOC}$ sont égaux.

Illustration



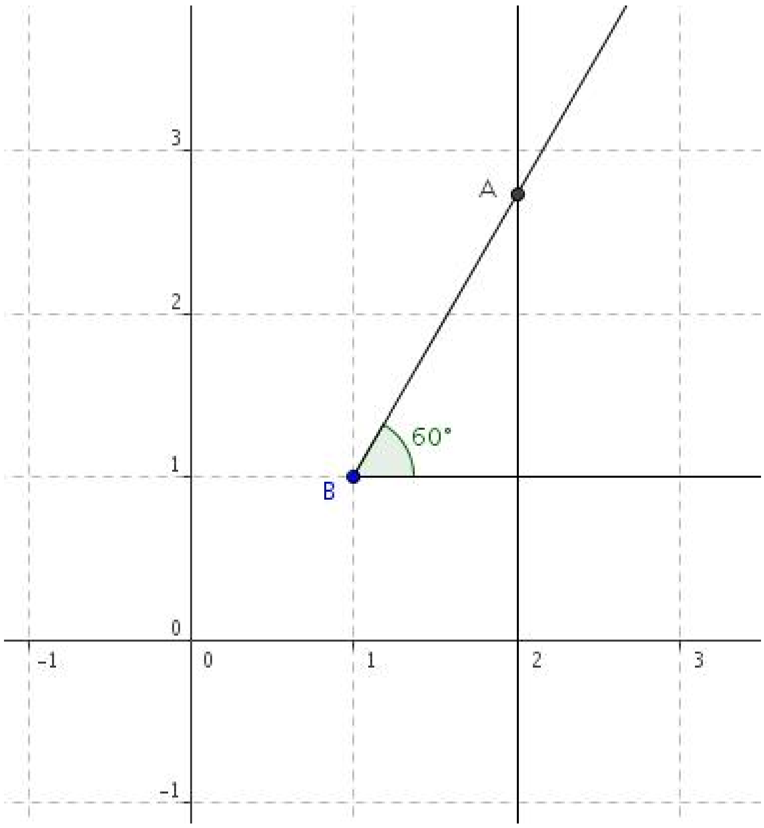
Exercice 12



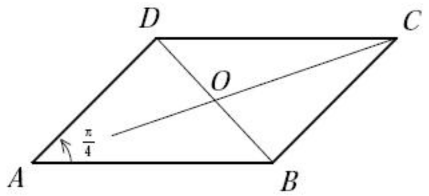
Dans un repère orthonormal de sens direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, on considère le point $B(1\ ;\ 1)$ et le point A d'abscisse 2 tel que :$(\vec{i}\ ,\overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

Illustration



Exercice 13



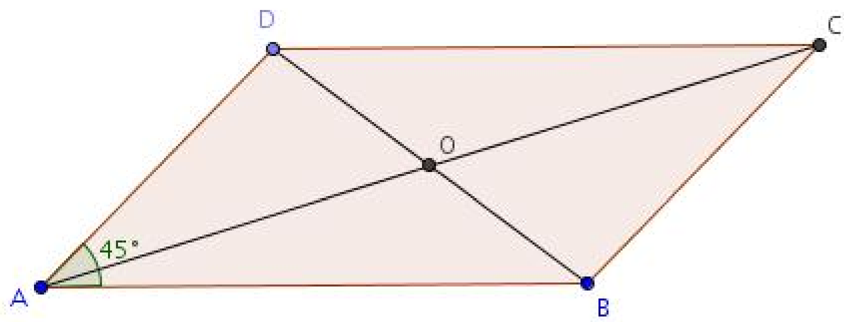
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1) Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

2) Quelle propriété du parallélogramme a-t-on démontré ?

3) On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{4}$.
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$.

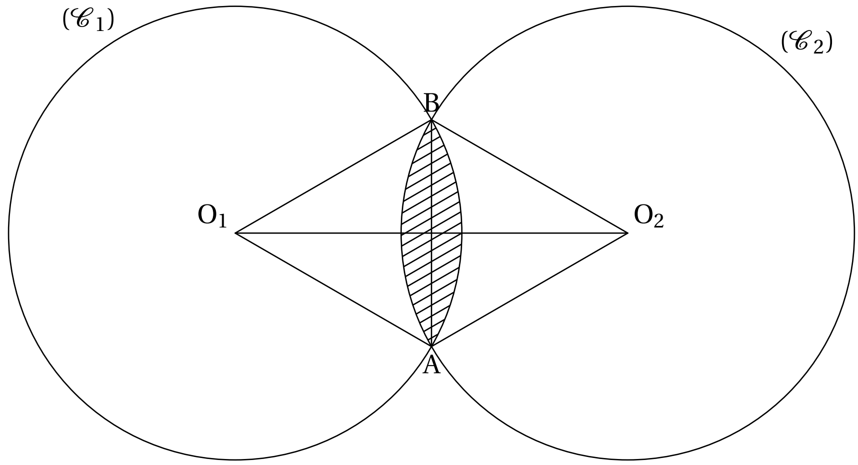
Illustration



Exercice 14

$(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_1)$ sont deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon $R = 2\ cm$.

On suppose que ces deux cercles se coupent en deux points A et B avec $(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}) = \dfrac{\pi}{3}$.



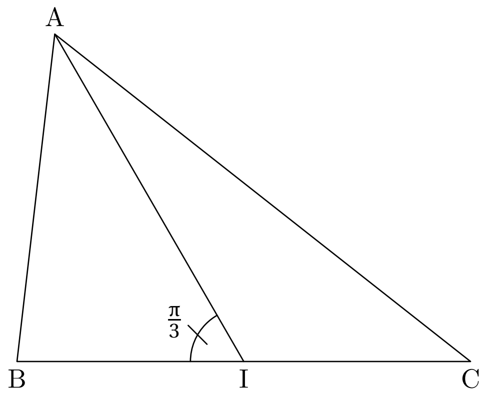
1) Quelle est la nature du quadrilatère O_1AO_2B ?

2) Calculer la distance O_1O_2 et la distance AB.

3) Calculer le périmètre et l'aire de la surface d'intersection des deux disques (zone hachurée sur la figure).

Rappel :
- un arc de cercle d'angle α radians et de rayon R a pour longueur $L = \alpha R$;
- un secteur angulaire d'angle α radians et de rayon R a pour aire : $A = \dfrac{\alpha}{2}R^2$.

Exercice 15



ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.
On sait que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IB})$; $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IC})$; $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 16

On considère la ligne brisée $ABCDE$ telle que :

$AB = 3\ cm$, $BC = 2\ cm$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

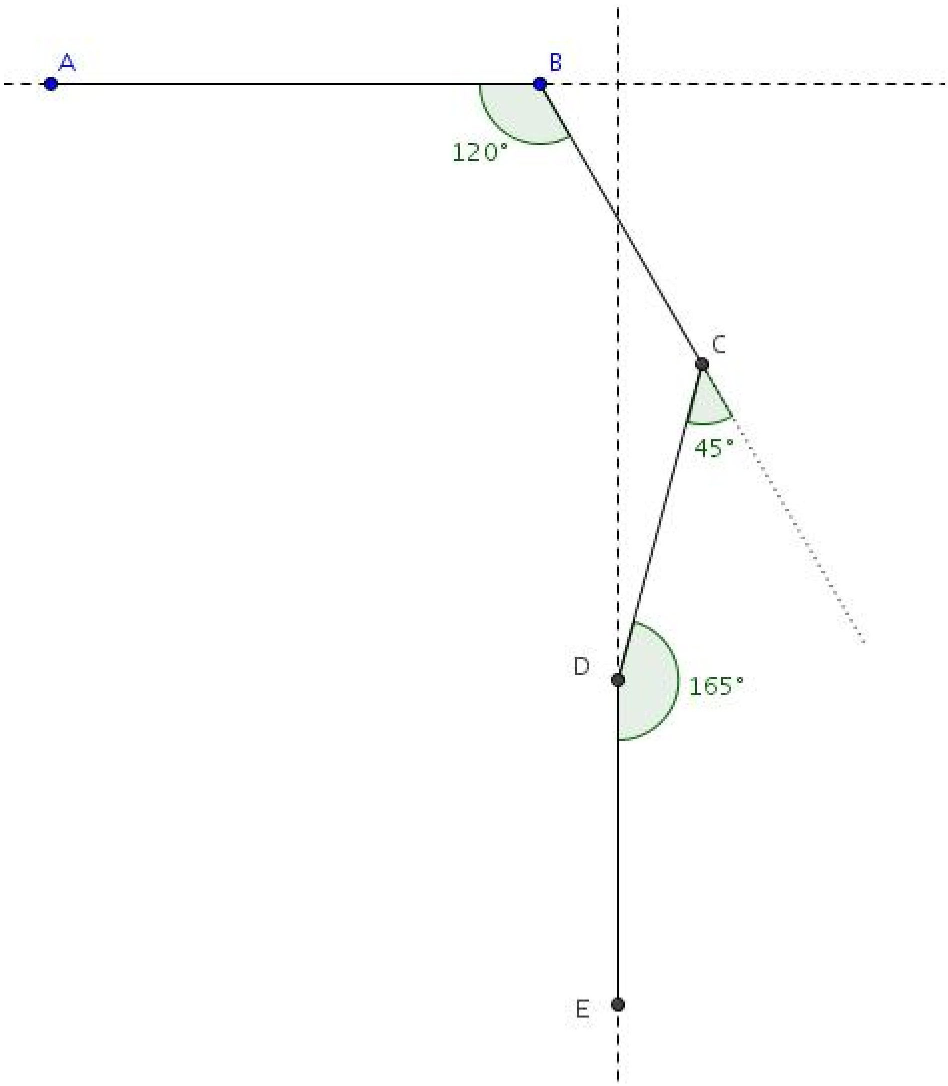
$CD = 3\ cm$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$DE = 2\ cm$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

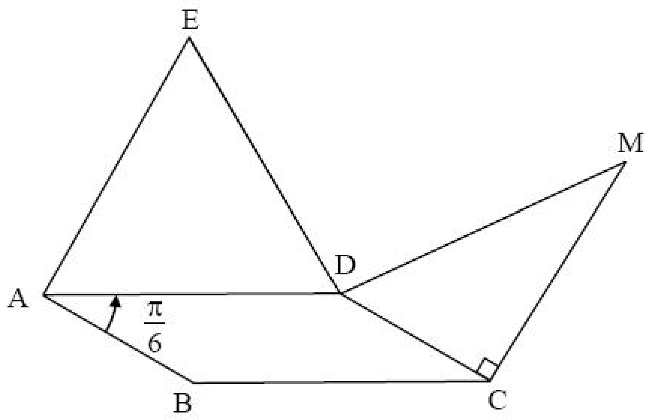
1) Construire cette ligne brise.

2) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$.

Illustration



Exercice 17



$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

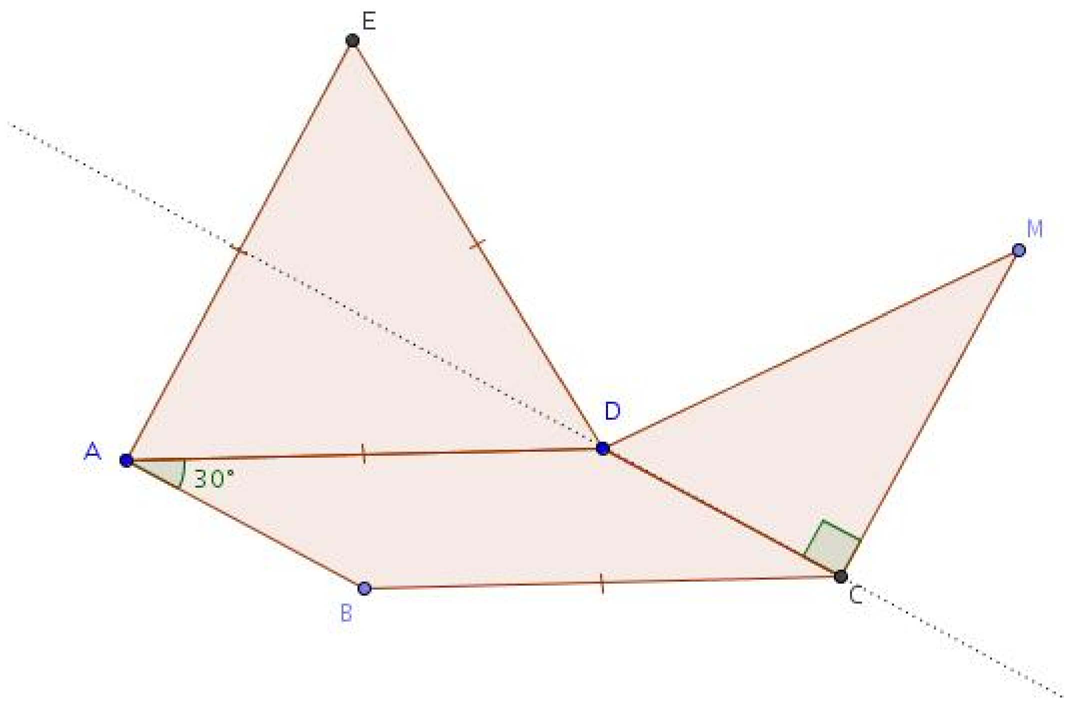
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.
ADE est un triangle équilatéral direct.
CMD est un triangle rectangle tel que :

$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AE})$.
Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Illustration



Exercice 18

On considère le triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $AB = 8\ cm$.

1) Construire le triangle ABC.

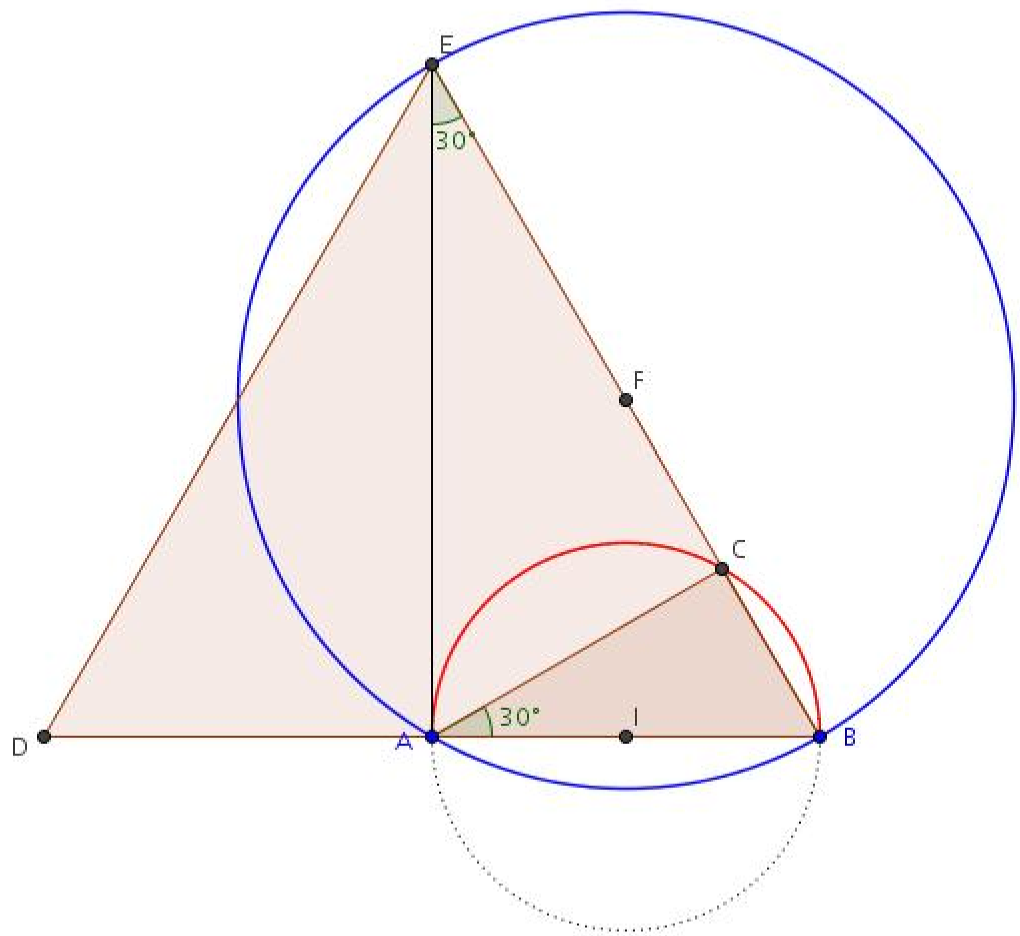
2) Déterminer et dessiner l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M qui vérifient :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

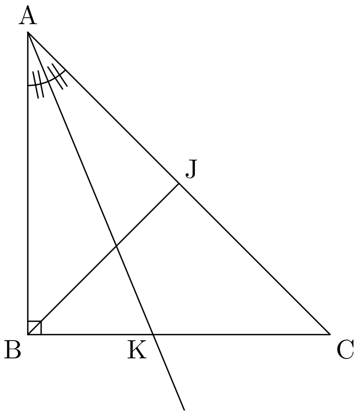
3) Déterminer et dessiner l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M qui vérifient :

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Illustration



Exercice 19



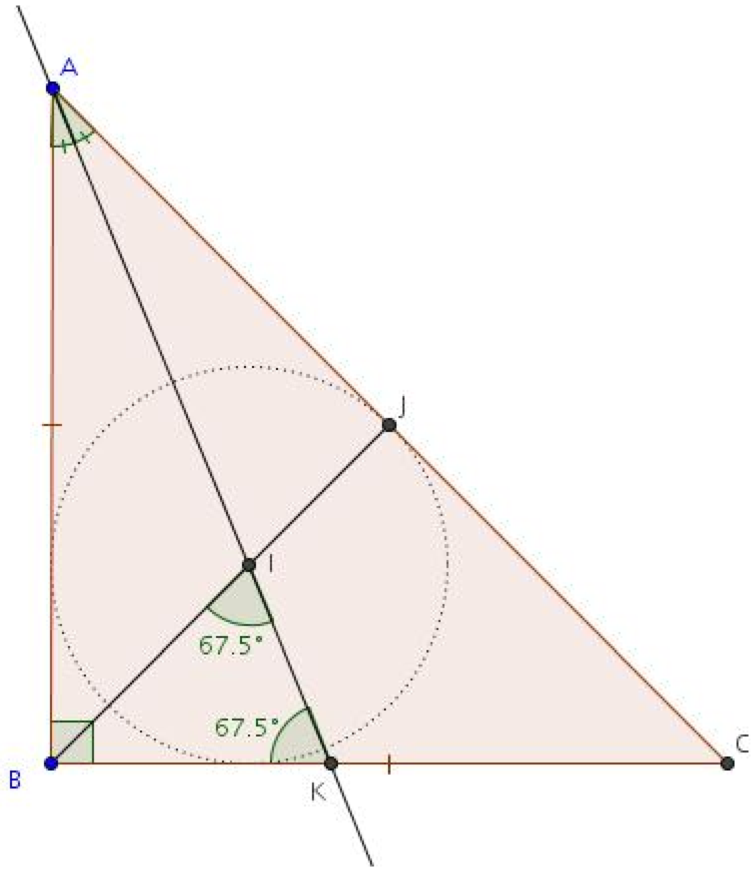
ABC est un triangle rectangle isocèle en B et direct.
K est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et du côté $[BC]$.

1) Déterminer la mesure principale en radians de : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{KA})$.

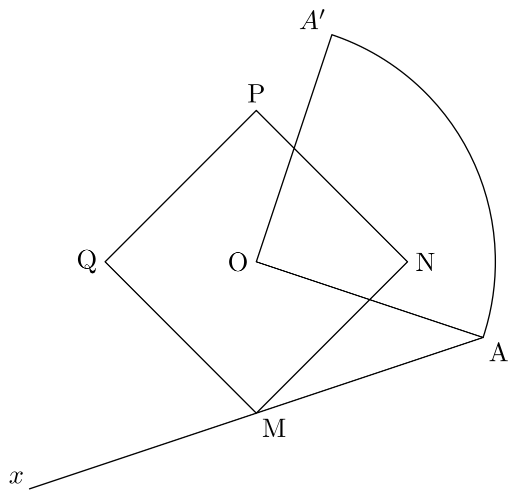
2) Soit J le milieu du segment $[AC]$.
Démontrer que $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{KA}) = (\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{CB})$.

3) Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC.
Quelle est la nature du triangle BIK ?

Illustration



Exercice 20



Soit $[Ax)$ une demi-droite d'origine A et O un point n'appartenant pas à cette demi-droite.
Pour tout point M de $[Ax)$, on considère le carré direct $MNPQ$ de centre O.

1) Soit A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer, en utilisant la relation de Chasles que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) + 2k\pi.$$

b) En déduire que :

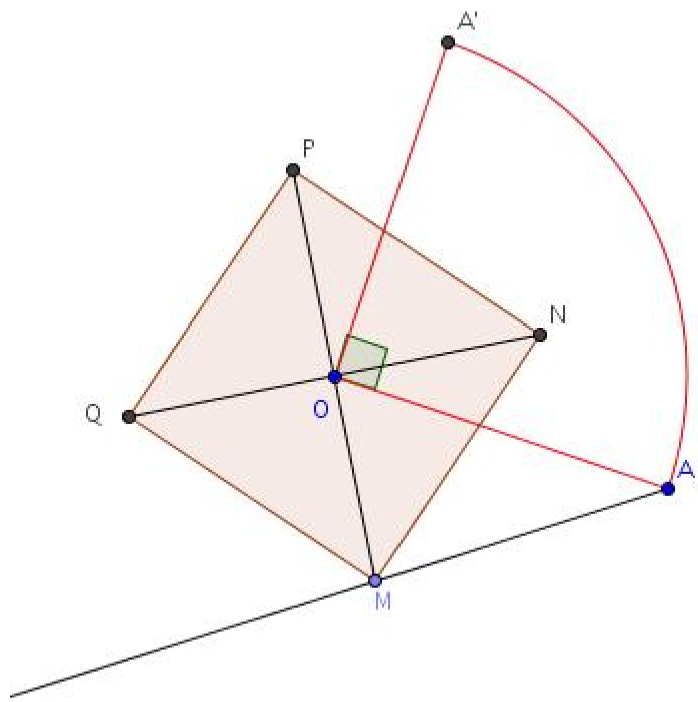
$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

pour tout point de $]Ax)$.

c) Déterminer le lieu des points N lorsque M décrit la demi-droite $]Ax)$.

2) Déterminer les lieux des points P et Q.

Illustration



Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50