Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 4

EXERCICE 1

1. *Justification que* f *est une densité de probabilité*

   f est continue et positive sur $[-1\ ;\ 2]$ d'après sa représentation graphique.

   On note A, B, C et D les points de de la représentation graphique de f d'abscisses respectives -1, 0, 1 et 2 (*on peut faire le dessin*).

   $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \text{aire}(ABCD) = \frac{(3+1)\times 0{,}5}{2} = 1$. Ainsi, f est une densité de probabilité sur $[-1\ ;\ 2]$.

2. *Calcul de* $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$

   On note E le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

   $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \text{aire}(ABCE) = \frac{(2+1)\times 0{,}5}{2} = 0{,}75$.

EXERCICE 2

1. *Probabilité des évènements* A, B, C *et* D

   θ suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

   $A = \left\{0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$ et $P(A) = P\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

   $B = \{\theta = 0\}$ et $P(B) = P(\theta = 0) = 0$ car θ est une variable aléatoire continue.

   $C = \left\{-\frac{\pi}{12} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{12}\right\}$ et $P(C) = P\left(-\frac{\pi}{12} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{3}$.

   $D = A \cap C = \left\{0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{12}\right\}$ et $P(C) = P\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\pi}{12} - 0}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{6}$.

2. *Calcul de* $P_A(C)$

   $P_A(C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

   On peut remarquer que $P_A(C) = P(C)$ donc les évènements A et C sont indépendants.

3. *Détermination du nombre réel positif* a *tel que* $P(-a \leqslant \theta \leqslant a) = 0{,}5$

   $P(-a \leqslant \theta \leqslant a) = \dfrac{a - (-a)}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{4a}{\pi}$. Donc $P(-a \leqslant \theta \leqslant a) = 0{,}5$ si, et seulement si, $\dfrac{4a}{\pi} = \dfrac{1}{2}$ soit $a = \dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 3

Partie A

1. *Probabilité que Max dépense moins de* 19,50 €

   X suit la loi uniforme sur $[15\ ;\ 30]$.

   On cherche $P(X < 19{,}50)$ et on a $P(X < 19{,}50) = P(15 \leqslant X < 19{,}50) = \dfrac{19{,}50 - 15}{30 - 15} = 0{,}3$.

2. *Probabilité que Max dépense entre* 19 € *et* 27 €

   On cherche $P(19 \leqslant X \leqslant 27)$ et on a $P(19 \leqslant X \leqslant 27) = \dfrac{27 - 19}{30 - 15} = \dfrac{8}{15}$.

3. *Prix moyen payé par Max*

   L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{15 + 30}{2} = 22{,}5$. En moyenne, Max paie 22,50 € son repas.

Partie B

1. *Loi suivie par* Y

   Le prix payé par Max un jour donné est indépendant du prix payé les autres jour, donc, Y qui donne le nombre de jours où Max a payé moins de 19,50 € sur les cinq jours de la semaine, suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(X < 19{,}50) = 0{,}3$.

2. *Probabilité que Max dépense moins de 19,50 € chaque jour de la semaine*
   On cherche $P(Y = 5)$ et $P(Y = 5) = 0{,}3^5 = 0{,}002\,43$.
3. *Espérance mathématique de* Y
   L'espérance mathématique de Y est $E(Y) = np = 5 \times 0{,}3 = 1{,}5$.
   En moyenne, Max dépense moins de 19,50 € pour son repas 1,5 fois par semaine.

EXERCICE 4

$\boxed{f(x) = \sqrt{100 - x^2}}$

1. *Ensemble de définition de* f
   On peut calculer $f(x)$ si, et seulement si, $100 - x^2 \geqslant 0$ soit $(10 - x)(10 + x) \geqslant 0$ donc f est définie sur $[-10\ ;\ 10]$.
2. *Variations de* f
   f est dérivable sur $]-10\ ;\ 10[$. Pour tout réel x de $]-10\ ;\ 10[$ on a $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$.
   Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ car, pour tout réel x de $]-10\ ;\ 10[$, $\sqrt{100 - x^2} > 0$.
   f est donc strictement croissante sur $[-10\ ;0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;10]$, f possède donc un maximum en 0 égal à $f(0) = 10$.
3. *Équation de la tangente* T *au point d'abscisse* 0
   T a pour équation $y = 10$ car $f'(0) = 0$ et $f(0) = 10$.
4. *Position relative de* $\mathcal{C}$ *par rapport à* T
   Comme f atteint son maximum pour $x = 0$, pour tout réel x de $[-10\ ;\ 10]$, $f(x) \leqslant f(0) = 10$, ainsi, $\mathcal{C}$ est située au-dessous de T.
5. *Conjecture sur la nature de* $\mathcal{C}$
   On peut conjecturer que $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de centre O (l'origine du repère) et de rayon $R = 10$, situé au-dessus de l'axe des abscisses.
6. *Preuve de la conjecture*
   Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   $M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ donc, si, et seulement si, $y^2 = 100 - x^2$ et $y \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $x^2 + y^2 = 100$ et $y \geqslant 0$.
   Or $OM^2 = x^2 + y^2$, donc $M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si $OM^2 = 100$ et $y \geqslant 0$ donc, si, et seulement si, $OM = 10$ et $y \geqslant 0$.
   L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 10$ est le cercle de centre O et de rayon $R = 10$ donc, la courbe $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon $R = 10$, situé au-dessus de l'axe des abscisses.
7. *Valeur exacte de l'intégrale*
   $\displaystyle\int_{-10}^{10} f(x)\,dx$ est égale à l'aire (en unités d'aire) du demi-disque de centre O et de rayon $R = 10$, ainsi $\displaystyle\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 10^2}{2} = 50\pi$.
8. a. *Calcul de l'aire du domaine hachurée*
   L'aire du domaine est la somme des aires de trois rectangles de même longueur $\frac{1}{3}$ et de « hauteurs » égales respectivement à $f(5)$, $f\left(5 + \frac{1}{3}\right)$ et $f\left(5 + \frac{2}{3}\right)$.
   Ainsi, cette aire est égale à $\frac{1}{3} \times f(5) + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{2}{3}\right)$.
   En utilisant l'algorithme pour $n = 3$ on a :
   $s_1 = \frac{1}{3} \times f(5)$ (pour $k = 0$)
   $s_2 = s_1 + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{1}{3}\right)$ (pour $k = 1$)
   $s_3 = s_2 + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{2}{3}\right)$ (pour $k = 2$).
   Donc $s_3 = \frac{1}{3} \times f(5) + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f\left(5 + \frac{2}{3}\right)$. *Quod erat demonstrandum.*
   b. *Valeur de* s_n *fournie par l'algorithme quand* n *devient grand*
   L'algorithme affichera $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(5 + \frac{k}{n}\right)$ après n boucles, c'est une approximation de $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx$.
   Ainsi, s_n « tend » vers cette intégrale quand n devient grand.