Exercice 1 (10 *points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On rappelle qu'une courbe de Bézier associée à $n+1$ points de contrôle successifs A_i, $0 \leq i \leq n$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\ \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i \left(1-t\right)^{n-i} \text{ avec } t \in \left[0;1\right].$$

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs $A(4;0)$, $S(12;6)$, $R(0;6)$ et $O(0;0)$.

1. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,3}(t)$.

2. On admet que :

$$B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$
$$B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$
$$B_{3,3}(t) = t^3 .$$

Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 32t^3 - 60t^2 + 24t + 4 \\ y = g_1(t) = -18t^2 + 18t \end{cases} \quad \text{pour } t \in \left[0;1\right].$$

3. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le **document réponse n°1,** compléter le tableau des variations conjointes des deux fonctions f_1 et g_1 figurant sur ce même document réponse.

4. Calculer la dérivée de la fonction g_1.
En déduire la valeur t_1 du paramètre *t* pour laquelle l'ordonnée du point $M(t)$ est maximale.

5. Déterminer la valeur t_0 du paramètre *t* pour laquelle l'abscisse du point $M(t)$ est maximale.

6. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.

Partie B

On désigne par a un nombre réel.

On souhaite compléter la figure du **document réponse n°1** avec une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- les points de contrôle successifs de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ sont $O(0;0)$, $E(0;a)$, $F\left(\frac{4}{3};-2\right)$ et $A(4;0)$;
- la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point $G\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre t.

Sous ce système de contraintes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont des tangentes communes aux points A *et* O.

1. Dans les conditions énoncées ci-dessus, la représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = 4t^2 \\ y = g_2(t) = 3(a+2)\,t^3 - 6(a+1)\,t^2 + 3at \end{cases} \qquad t \in [0;1].$$

Montrer que $a = -2$.

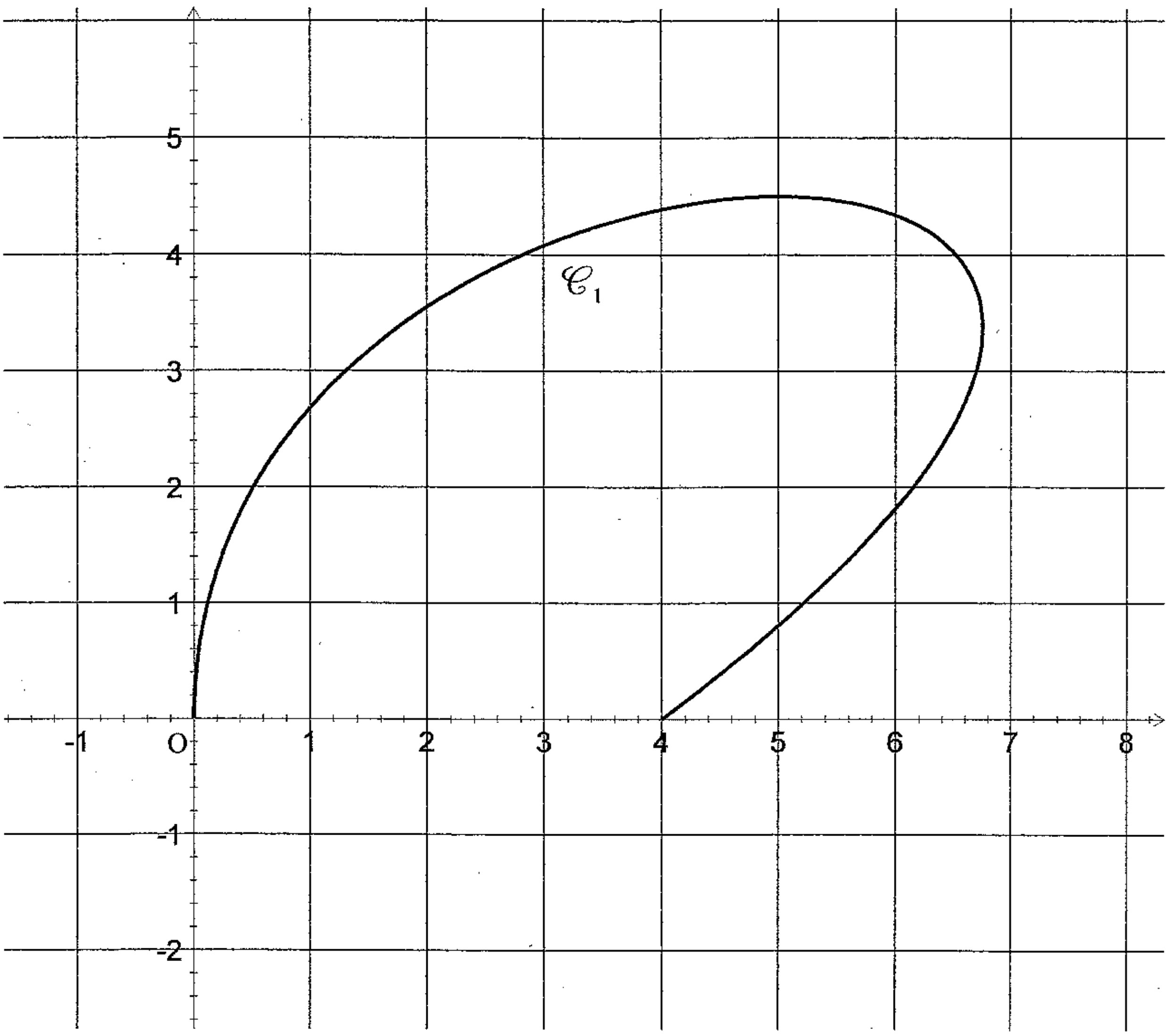
2. Pour chaque valeur de t, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire le point de paramètre t de la courbe de Bézier.

Utiliser cet algorithme, pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre t, pour retrouver graphiquement la position du point G.

Laisser apparentes les étapes de la construction.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le **document réponse n°1**.

Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)



t	0		t_0		t_1		1
$f_1'(t)$		+	0		–		0
$g_1'(t)$							
$f_1(t)$							
$g_1(t)$							