# IRIS 2 – devoir en classe n° 1

Jeudi 17 octobre 2013

Pour tout le devoir, on note $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathscr{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

## EXERCICE 1 – recherche de la transformée de LAPLACE d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = t\mathscr{U}(t) - (t-2)\mathscr{U}(t-2).$$

1. Déterminer les expressions de $f(t)$ sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$, $[0\,;\,2[$ et $[2\,;\,+\infty[$.
2. Représenter graphiquement la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Déterminer l'image $F$, par la transformation de LAPLACE, de la fonction $f$.

## EXERCICE 2 – recherches d'images et d'originaux

1. Déterminer les transformées de LAPLACE $G_1$, $G_2$ et $G_3$ (dont on supposera l'existence) des fonctions $g_1$, $g_2$ et $g_3$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(t) = \sin(t)\,\mathscr{U}(t), \qquad g_2(t) = e^{-t}\sin(t)\,\mathscr{U}(t), \qquad g_3(t) = e^{-(t-1)}\sin(t-1)\,\mathscr{U}(t-1).$$

2. Déterminer les originaux $h_1$, $h_2$ et $h_3$ (dont on supposera l'existence) des fonctions $H_1$, $H_2$ et $H_3$ définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$H_1(p) = \frac{1}{p^2}, \qquad H_2(p) = \frac{1}{(p+1)^2}, \qquad H_3(p) = \frac{e^{-p}}{(p+1)^2}.$$

## EXERCICE 3 – résolution d'une équation différentielle avec la transformation de LAPLACE

$x$ étant une fonction causale, c'est-à-dire nulle sur $]-\infty\,;\,0[$, dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on considère l'équation différentielle $(E)$ :

$$x' + 3x = \big[3\cos(t) - \sin(t)\big]\mathscr{U}(t) \text{ avec } x(0+) = 2.$$

1. Déterminer l'image $\Phi$ par la transformation de LAPLACE de la fonction $\varphi$ définie pour tout nombre réel $t$ par :

$$\varphi(t) = \big[3\cos(t) - \sin(t)\big]\mathscr{U}(t).$$

2. On admet que la solution $x$ de l'équation différentielle $(E)$ admet une image par la transformation de LAPLACE notée $X$.

   Montrer que, pour tout réel $p > 0$, $X(p) = \dfrac{2p^2+3p+1}{(p^2+1)(p+3)}$.

3. Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $p > 0$ :

$$\frac{2p^2+3p+1}{(p^2+1)(p+3)} = \frac{ap}{p^2+1} + \frac{b}{p+3}.$$

4. Déduire des résultats précédents l'expression de $x(t)$ en fonction de $t$.