Séries entières

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Décembre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Définition d'une série entière – rayon de convergence

1.1 Définition

Définition 1.1.1
On appelle série entière *toute série dont le terme général est* $a_n t^n$ *où* a_n *est un nombre réel ou complexe.*

Exemples
$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n}{n-1} t^n$ sont des séries entières.

1.2 Rayon de convergence

Théorème 1.2.1
Pour une série entière $\sum a_n t^n$ *:*
- *soit la série diverge pour tout* $t \in \mathbb{C}^*$*, on pose alors* $R = 0$ *;*
- *soit la série est absolument convergente pour tout* $t \in \mathbb{C}$*, on pose alors* $R = \infty$ *;*
- *soit il existe un nombre réel strictement positif* R *tel que :*
  - *si* $|t| < R$*, la série est absolument convergente ;*
  - *si* $|t| > R$*, la série diverge.*

Dans tous les cas, R *est le* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n t^n$*. Lorsque* t *est un nombre réel, l'intervalle* $]-R\,;\,R[$ *est l'*intervalle de convergence.

☛ Lorsque R est un nombre réel strictement positif, on ne sait rien concernant la nature de $\sum a_n t^n$ pour $t = R$ ou $t = -R$.

☛ Lorsque t est un nombre réel, $|t|$ désigne la valeur absolue de t et lorsque t est un nombre complexe, $|t|$ désigne le module de t.

✏ Démontrer que, pour tout nombre t tel que $|t| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ (utiliser la somme des termes d'une suite géométrique).

Que se passe-t-il lorsque $|t| > 1$? Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence ?

Examiner les cas $t = 1$ et $t = -1$.

2 Développement en série entière d'une fonction numérique

2.1 Formule de MacLaurin [1]

Théorème 2.1.1 (formule de MacLaurin)
Soit f *une fonction d'une variable réelle admettant des dérivées à un ordre quelconque continues sur l'intervalle* $]-R\,;\,R[$ *(*R *est un réel strictement positif ou éventuellement* $R = \infty$*).*
S'il existe un réel $M > 0$ *tel que pour tout* $t \in]-R\,;\,R[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait* $|f^n(t)| \leqslant M$*, alors* f *est* développable en série entière *(avec pour rayon de convergence* R*) et :*

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

1. Colin MacLaurin est un mathématicien écossais (1698-1746). Il a formalisé la méthode de Newton pour introduire la notion de fonction dérivée.

2.2 Applications

En utilisant la formule de MACLAURIN (théorème 2.1.1), démontrer les formules suivantes :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^3}{3\,!} + \cdots + \frac{t^n}{n\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n\,!} \qquad R = \infty$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^4}{4\,!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)\,!} \qquad R = \infty$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3\,!} + \frac{t^5}{5\,!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \qquad R = \infty$$

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, démontrer la formule suivante :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \qquad R = 1$$

En intégrant terme à terme la dernière formule, on démontre que :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad R = 1$$

2.3 Série du binôme

Théorème 2.3.1 (série du binôme)
Soit α un nombre réel. Alors :

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha\, t + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\,!}\, t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\,!}\, t^n \qquad R = 1$$

✏ Développer en série entière la fonction f définie par $f(t) = \sqrt{1+t}$.

3 Séries entières et développements limités

Supposons qu'une fonction réelle d'une variable réelle f soit développable en série entière (le rayon de convergence étant non nul) :

$$f(t) = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots + a_n\, t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \text{ pour tout } t \in]-R\,;\ R[.$$

On a alors :

$$f(t) = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots + a_n\, t^n + t^n(a_{n+1}\, t + a_{n+2}\, t^2 + \cdots).$$

En posant $\varepsilon(t) = a_{n+1}\, t + a_{n+2}\, t^2 + \cdots$ on obtient :

$$f(t) = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots + a_n\, t^n + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

3.1 Définition

Définition 3.1.1
Soit f *une fonction numérique réelle d'une variable réelle définie au voisinage de* 0 *(c'est-à-dire sur un intervalle* I *contenant* 0*).*
Si, quel que soit $t \in I$*, on a* $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t)$ *avec* $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ *alors l'expression* $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t)$ *est le* développement limité *d'ordre* n *de la fonction* f *au voisinage de* 0*.*
$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ *est la* partie régulière *du développement et* $t^n \varepsilon(t)$ *le* terme complémentaire.

☛ Lorsqu'une fonction possède un développement limité en 0 d'ordre n, ce développement limité est unique.

3.2 Opérations sur les développements limités

Théorème 3.2.1
On considère deux fonctions numériques réelles d'une variable réelle f *et* g *admettant en* 0 *des développements limités d'ordre* n *dont les parties régulières sont* P *et* Q*.*

1. *La somme* $f+g$ *admet en* 0 *un développement limité d'ordre* n *dont la partie régulière est* $P+Q$*.*
2. *Le produit* fg *admet en* 0 *un développement limité d'ordre* n *dont la partie régulière est* PQ *en enlevant tous les termes de degré strictement supérieur à* n*.*

✏ Déterminer les développements limités en 0 d'ordre 3 de $t \longmapsto f(t) = \dfrac{1}{1+t} + \ln(1+t)$ et de $t \longmapsto g(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.

3.3 Applications aux limites

✏ En utilisant des développements limités, déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t - \sin(t)}{t^3}$.