2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Lundi 5 octobre 2015

Matrices et applications linéaires

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Calculer f^2
   (c) Etablir que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ soit une famille libre.
   (b) En déduire $n \geqslant 3$. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $n = 3$.
   (c) Justifier que la famille $\mathscr{B} = (u^2(x_0), u(x_0), x_0)$ est une base de E. Quelle est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$? Déterminer le noyau et l'image de u.
   (d) Application : montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est semblable à $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Discuter en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer le rang des matrices suivantes :
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Déterminer de deux manières différentes l'inverse de la matrice :
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.