Correction du devoir n°6

Partie I

1. Après un lancer on a au maximum un 'pile', d'où $d_1 = 1$, et obtenir au moins deux 'pile' en deux lancers signifie obtenir 'pile' à chacun des deux lancers, soit $P(P_1\,P_2) = \frac{1}{4}$ et $d_2 = 1 - P(P_1\,P_2) = \frac{3}{4}$.
   $\overline{D}_3$ est réalisé si on a obtenu 0 'face' au cours des trois premiers lancers, ou bien un 'face' en première ou dernière place. Ainsi $1 - d_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\,\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

$$\boxed{d_1 = 1,\ d_2 = \frac{3}{4},\ d_3 = \frac{5}{8}}$$

2. (a) Si on commence par un 'face', ne pas réaliser 2 'pile' consécutifs en $n+2$ lancers revient à ne pas réaliser 2 'pile' consécutifs au cours des $n+1$ lancers suivant le premier, donc $P_{F_1}(D_{n+2}) = P(D_{n+1})$.
   (b) Les événements P_1P_2, P_1F_2, F_1F_2 et F_1P_2 constituent un système complet d'événements mais $D_{n+2} \cap P_1P_2 = \emptyset$; par ailleurs $F_1F_2 \cup F_1P_2 = F_1$, donc $D_{n+2} = (F_1 \cap D_{n+1}) \cup (P_1F_2 \cap D_n)$.
   On a alors $P\left(D_{n+2}\right) = d_{n+2} = P(F_1)\,P_{F_1}(D_{n+2}) + P(P_1F_2)\,P_{P_1F_2}(D_{n+2})$
   $P(P_1F_2) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{P_1F_2}(D_{n+2}) = P_{F_2}(D_{n+2}) = P(D_n)$ par un raisonnement analogue à celui de la question précédente.
   On en déduit alors : $d_{n+2} = \dfrac{1}{2}\,d_{n+1} + \dfrac{1}{4}\,d_n$
3. La suite (d) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, l'équation caractéristique associée est $X^2 - \frac{1}{2}\,X - \frac{1}{4} = 0$ dont les racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
   Par conséquent il existe deux constantes réelles α et β telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$
   $d_1 = 1 = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$ et $d_2 = \dfrac{3}{4} = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2$
   donc $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ et finalement $\alpha = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$ et $\beta = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}$
   $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n = 0$, d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = 0}$$

4. $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$ sont les termes généraux de deux séries géométriques convergentes donc $\sum d_n$ converge et sa somme vaut :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n = \frac{\alpha\,r_1}{1-r_1} + \frac{\beta\,r_2}{1-r_2} =$$
   $$\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\frac{4}{4-1-\sqrt{5}} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\frac{4}{4-1+\sqrt{5}} = 5$$

Partie II

1. Personne ne peut gagner avant le troisième lancer donc $P(T=1) = P(T=2) = 0$; $[T=3] = F_1P_2P_3 \cup P_1P_2F_3$ donc $P(T=3) = \dfrac{1}{4}$
2. $[T > n]$ signifie que personne n'a gagné après n parties mais que quelqu'un va finir par gagner et $[T=0]$ que personne ne va gagner, donc $[T>n] \cup [T=0]$ est l'événement « Personne n'a gagné à l'issue des n premières parties »
   La partie n'est pas finie à l'instant n si on n' a jamais obtenu 2 'pile' consécutifs ou si on n'a eu que des 'pile' et aucun 'face' ; donc $P\left([T>n] \cup [T=0]\right) = d_n + \dfrac{1}{2^n}$
3. $[T=n] = \Big([T>n-1] \cup [T=0]\Big) \setminus \Big([T>n] \cup [T=0]\Big)$ avec $\Big([T>n] \cup [T=0]\Big) \subset \Big([T>n-1] \cup [T=0]\Big)$ donc $P(T=n) = d_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}} - \left(d_n + \dfrac{1}{2^n}\right) = d_{n-1} - d_n + \dfrac{1}{2^n}$

4. Par définition, $P\,(T=0) = 1 - \sum_{n=3}^{\infty} P(T=n) = 1 - \sum_{n=3}^{\infty}\left(d_{n-1} - d_n + \frac{1}{2^n}\right) = d_2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 0.$

   Ainsi T est à valeurs dans $[\![3, +\infty[\![$ et $P(T_n = n) = \frac{\sqrt{5}}{10}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{2^n}$

Partie III

1.