Correction du devoir n°15

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$

2. X_1^2 est une variable à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et $\forall x \geqslant 0, P(X_1^2 \leqslant x) = P(-x \leqslant X_1 \leqslant x)$.
   Comme X_1 est à densité, on a $P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) - F_{X_1}(-\sqrt{x})$, donc $P(X_1^2 \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}\big(\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})\big) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi\,x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

3. (a) On a une intégrale doublement impropre (en 0 et en x), et par changement de variable $v = x - t$, on constate que pour $0 < b < x$, on a, sous réserve de convergence $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{x-b}^{x} \frac{1}{\sqrt{x-v}\,\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$, donc la convergence en 0 équivaut à celle en x.
   Soit $0 < a < b < x$, on pose $t = x\,\cos^2(\theta),\ \mathrm{d}t = -2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, θ varie entre $\sqrt{\arccos(\frac{a}{x})}$ et $\sqrt{\arccos(\frac{b}{x})}$ avec $0 < \sqrt{\arccos(\frac{b}{x})} < \sqrt{\arccos(\frac{a}{x})} < \dfrac{\pi}{2}$ donc sur tout l'intervalle d'intégration $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont positifs, par conséquent $\sqrt{t} = \sqrt{x}\,\cos\theta,\ \sqrt{x-t} = \sqrt{x}\,\sin\theta$ et
   $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = -2\int_{\sqrt{\arccos(\frac{a}{x})}}^{\sqrt{\arccos(\frac{b}{x})}} \mathrm{d}\theta = 2\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right) - \arccos\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)\right)$, donc $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t =$
   $\displaystyle\lim_{\substack{a \to 0\\ b \to x}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = 2\Big(\arccos(0) - \arccos\big(\frac{\pi}{2}\big)\Big) = \pi.$

   (b) X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes, $X_1^2 + X_2^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc une densité de $X_1^2 + X_2^2$ est donnée par :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0$ si $x < 0$ et pour $x \geqslant 0,\ h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$; or $\forall t < 0,\ f(t) = 0$ donc $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$; de même $f(x-t) = 0$ pour $t > x$ donc finalement $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$
   $= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(x-t)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}$ d'après le calcul précédent.

$$\boxed{X_1^2 + X_2^2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\tfrac{1}{2})}$$

4. (a) L'intégrale $= \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,dt$ est impropre en x ; soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < x$, on a :
   $\theta = \arcsin\sqrt{1 - \dfrac{t}{x}}$ donc $\sin^2\theta = 1 - \dfrac{t}{x}$ et $2\,\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}t$, $t = x\,\cos^2\theta,\ \sqrt{x-t} = \sqrt{x}\,\sin\theta$,
   donc $\displaystyle\int_0^a \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = 2\,x^{\frac{r-1}{2}} \int_{\arcsin(\sqrt{1-\frac{a}{x}})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$
   $\displaystyle\lim_{a \to x}\int_0^a \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a \to x} 2\,x^{\frac{r-1}{2}} \int_{\arcsin(\sqrt{1-\frac{a}{x}})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\,x^{\frac{r-1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\,x^{\frac{r-1}{2}}\,W_{r-1}.$

   (b) Initialisation : $r = 2$, une densité de $X_1^2 + X_2^2$ est donnée par $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}$ pour $x \geqslant 0$ et $f_2(x) = 0$ pour $x < 0$, donc $C_2 = \dfrac{1}{2}$.
   Soit $r \geqslant 2$, on suppose qu'une densité f_r de $X_1^2 + \cdots + X_r^2$ est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_r(x) = C_r\,x^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $f_r(x) = 0$ sinon. Les variables $X_1^2 + \cdots + X_r^2$ et X_{r+1}^2 sont indépendantes, donc une densité est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{r+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$
   f_r et f étant nulles sur $\mathbb{R}^-$, on a $\forall x < 0,\ f_{r+1}(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{r+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$.
   $\displaystyle\int_0^x f_r(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x C_r\,t^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}}{\sqrt{2\,\pi\,(x-t)}}\mathrm{d}t = \frac{C_r\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,C_r\,W_{r-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{r+1}{2}-1}$

5. (a) et (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$, donc $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}$; or f_1 est la question f définie à la question 2, ce qui est en accord avec l'expression de f.

(c) C_2 a déjà été calculé et vaut $\dfrac{1}{2}$.

6. (a) On pose $v(x) = x^{\frac{r}{2}}$ donc $v'(x) = \frac{r}{2} x^{\frac{r}{2}-1}$; $u'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $u(x) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. On a alors : $\displaystyle\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\,x^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_\varepsilon^t + 2\times\frac{r}{2}\int_\varepsilon^t x^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$; $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} -2\,\varepsilon^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}} = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -2\,t^{\frac{r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$ donc on montre par récurrence sur r que $\forall r \geqslant 1, J_r$ converge et $J_{r+2} = r\,J_r$:

Initialisation : soit $k = 1$, $J_1 = \sqrt{2\,\pi}$ et $J_2 = 2$

Soit $k \geqslant 1$; on suppose que J_{2k} et J_{2k-1} convergent.

D'après le calcul précédent, $\displaystyle J_{2k+1} = \lim_{\substack{t\,\to\,+\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}} (2\,k-1)\int_\varepsilon^t x^{\frac{2k-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = (2\,k-1)\,J_{2k-1}$

De même, $\displaystyle J_{2k+2} = \lim_{\substack{t\,\to\,+\infty\\ \varepsilon\,\to\,0}} 2\,k\int_\varepsilon^t x^{\frac{2k}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = 2\,k\,J_{2k}$

Donc J_{2k+2} et J_{2k+1} convergent et la récurrence est établie.

(b) On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $J_{2k+1} = (2\,k-1)\,(2\,k-3)\times\cdots\times 3\times J_1 = \dfrac{(2\,k)!}{2^k\,k!}\sqrt{2\,\pi}$

De même, $\forall k \in \mathbb{N}$, $J_{2k} = (2\,k-2)\,(2\,k-4)\times\cdots\times 2\times J_2 = 2^{k-1}\,(k-1)!\times 2 = 2^k\,(k-1)!$

(c) f_r est une densité de probabilité donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 = C_r\times J_r$; on obtient ainsi les valeurs annoncées de C_{2k} et C_{2k+1} .