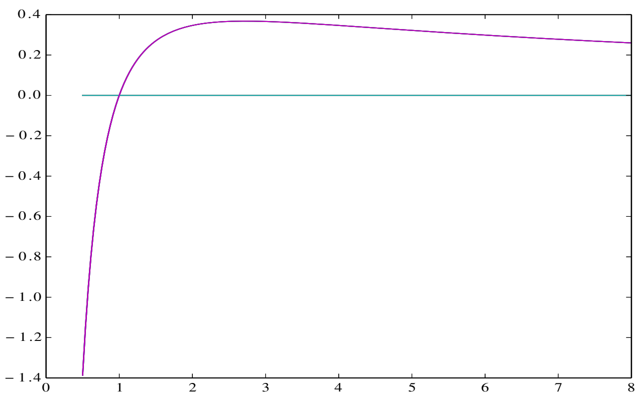
Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM n°1
« Suites & Valeurs approchées »

Partie A

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; donc f est croissante sur $]0,e[$ et décroissante sur $]e,+\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0



2. (a) g est définie sur $]1,e]$, strictement croissante, à valeurs dans $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, donc réalise une bijection de $I=]1,e]$ sur $\boxed{K=\left]0,\frac{1}{e}\right]}$

   De même, h est définie sur $[e,+\infty[$, strictement décroissante, à valeurs dans $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, donc réalise une bijection de $J=[e,+\infty[$ sur K.

   (b) g est définie et dérivable sur I, à valeurs dans K ; h^{-1} est définie et dérivable sur $K\setminus\{1/e\}$ (puisque h' existe et ne s'annule pas sur $J=h^{-1}(\left]0,\frac{1}{e}\right[)$ à valeurs dans J ; donc la composée $\varphi=h^{-1}\circ g$ est définie et dérivable sur $]1,e[$, à valeurs dans J. De plus g et $=h^{-1}$ étant bijectives, φ l'est aussi comme composée de deux bijections.

   La dérivée d'une fonction composée donne : $\varphi'(x)=g'(x)\times\left(h^{-1}\right)'\circ g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\times\dfrac{1}{h'\circ h^{-1}\big(g(x)\big)}$

   Finalement $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\times\dfrac{1}{h'\big(\varphi(x)\big)}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\times\dfrac{\big(\varphi(x)\big)^2}{1-\ln\big(\varphi(x)\big)}=\left(\dfrac{\varphi(x)}{x}\right)^2\times\dfrac{\ln x-1}{\ln\big(\varphi(x)\big)-1}$

3. (a) • Soit $x\in]1,e[$, $x\in I$ donc $\varphi(x)\in J$ c'est à dire $\varphi(x)\geqslant e>x$

   D'autre part $f\big(\varphi(x)\big)=f\Big(h^{-1}\circ g(x)\Big)=\Big(f\circ h^{-1}\Big)\big(g(x)\big)=g(x)$ car $g(x)\in K$ et $\forall y\in K,\ \big(f\circ h^{-1}\big)(y)=y$

   De plus $f(x)=g(x)$ car f et g coïncident sur I.

   • Réciproquement, soit un couple (x,y) tel que $0<x<y$ et $f(x)=f(y)$. D'après les variations de f sur $]0,+\infty[$, en particulier comme f est strictement croissante sur I et strictement décroissante sur J, on a nécessairement $1<x<e<y$.

   L'égalité $f(x)=f(y)$ peut donc s'écrire aussi $g(x)=h(y)$, ou encore $y=h^{-1}\big(g(x)\big)=\varphi(x)$.

   $$\boxed{\text{Finalement } x\in]1,e[\iff \big(x,\varphi(x)\big)\in A}$$

   (b) Soient n et p deux entiers naturels tels que $n<p$ et $n^p=p^n$; on a les équivalences suivantes :

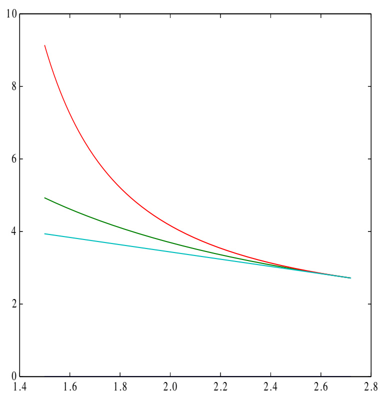
   $$\begin{cases} n<p\\ n^p=p^n\end{cases}\iff\begin{cases} n<p\\ \ln\left(n^p\right)=\ln\left(p^n\right)\end{cases}\iff\begin{cases} n<p\\ p\,\ln n=n\,\ln p\end{cases}\iff\begin{cases} n<p\\ \frac{\ln n}{n}=\frac{\ln p}{p}\end{cases}\iff\begin{cases} n<p\\ f(n)=f(p)\end{cases}$$

D'après la question précédente, on doit avoir $n \in I$ et $p = \varphi(n)$; or 2 est le seul entier appartenant à $]1, e[$ et on a bien $\varphi(2) = 4$. Par conséquent

$$\boxed{(2,4) \text{ est l'unique couple } (n,p) \text{ d'entiers naturels tel que } n < p \text{ et } n^p = p^n.}$$

4. (a) Les fonctions α et β sont définies et dérivables sur I et l'on a $\forall x \in I,\ \alpha'(x) = -\dfrac{e^2}{x^2}$, $\beta'(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\big(\ln x\big)^3}$

Ces deux fonctions sont strictement décroissantes sur I ; de plus $\alpha(e) = \beta(e) = e$ et $\alpha'(e) = \beta'(e) = -1$, donc leurs deux courbes représentatives admettent au point d'abscisse e la même demi-tangente de pente -1 et d'équation $\boxed{Y = -X + 2\,e}$



(b) Soit $x \in I$, $\varphi(x) > e > x$ (voir question 3a) ; de plus :
f est strictement décroissante sur I donc $\forall t \in [x, e]\,,\ f(t) \geqslant f(x)$;
f est strictement croissante sur J donc $\forall t \in [e, \varphi(x)]\,,\ f(t) \geqslant f(x)$.
Ainsi $\forall t \in [x, \varphi(x)]$, $f(t) \geqslant f(x)$ et $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}t = f(x)\Big(\varphi(x) - x\Big)$.

$$\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{\varphi(x)} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\big(\ln t\big)^2}{2}\right]_x^{\varphi(x)} = \frac{\big(\ln \varphi(x)\big)^2 - \big(\ln x\big)^2}{2} = \frac{\big(\ln \varphi(x) - \ln x\big)\big(\ln \varphi(x) + \ln x\big)}{2}$$

De la minoration précédente, on déduit $\dfrac{\big(\ln \varphi(x) - \ln x\big)\big(\ln \varphi(x) + \ln x\big)}{2} \geqslant f(x)\big(\varphi(x) - x\big)$

Or $\dfrac{\ln\big(\varphi(x)\big)}{\varphi(x)} = \dfrac{\ln x}{x}$ donc $\dfrac{\big(\varphi(x)\,\frac{\ln x}{x} - \ln x\big)\big(\ln \varphi(x) + \ln x\big)}{2} \geqslant f(x)\big(\varphi(x) - x\big)$ puis

$\ln x\,\big(\varphi(x) - x\big)\big(\ln \varphi(x) + \ln x\big) \geqslant 2\,x\,f(x)\big(\varphi(x) - x\big)$ et en remarquant que $\varphi(x) - x > 0$ et $\ln x > 0$,

$\big(\ln \varphi(x) + \ln x\big) \geqslant 2\,\dfrac{x\,f(x)}{\ln x} = 2$; or $\alpha(x) \leqslant \varphi(x) \iff e^2 \leqslant x\,\varphi(x) \iff 2 \leqslant \ln x + \ln\big(\varphi(x)\big)$

On a donc prouvé $\boxed{\forall x \in I,\ \alpha(x) \leqslant \varphi(x)}$

(c) $$f\big(\beta(x)\big) - f(x) = \frac{\big(\ln x\big)^2}{x} \times \ln\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) - \frac{\ln x}{x} = \frac{\big(\ln x\big)^2}{x} \times \big(\ln x - 2\,\ln(\ln x)\big) - \frac{\ln x}{x}$$
$$= \frac{\ln x}{x} \times \big((\ln x)^2 - 1 - 2\,(\ln x)\ln(\ln x)\big)$$

$\dfrac{\ln x}{x}$ est positif sur $]1, e[$ donc on pose $y = \ln x$; on remarque que $x \in]1, e[\iff y \in]0, 1[$ et on étudie le signe sur $]0, 1[$ de la fonction $u : y \mapsto y^2 - 2\,y\,\ln y - 1$: u est dérivable sur $]0, 1[$ avec $u'(y) = 2\,(y - \ln y - 1)$
On vérifie à présent que $\forall y \in]0, 1[,\ \ln y \leqslant y - 1$ donc u est croissante sur $]0, 1[$; comme $u(1) = 0$ on déduit u strictement positive sur $]0, 1[$ et $f\big(\beta(x)\big) - f(x) > 0$

On a donc bien montré $\boxed{\forall x \in]1, e[,\ f\big(\beta(x)\big) < f(x)}$

Soit $x \in]1, e[,\ \beta(x) > e$ donc $f(x) = g(x)$ et $f\big(\beta(x)\big) = h\big(\beta(x)\big)$ et h est décroissante sur K. h^{-1} est également décroissante, par conséquent $f\big(\beta(x)\big) = h\big(\beta(x)\big) < f(x) = g(x)$ entraine $\beta(x) > h^{-1} \circ g(x) = \varphi(x)$

On a donc prouvé $\boxed{\forall x \in]1,e[\,,\ \varphi(x) \leqslant \beta(x)}$

(d) D'après les questions 4b et 4c, $\forall x \in]1,e[\,,\ \alpha(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta(x)$, de plus $\varphi(e) = e$; donc $\alpha(x) - e \leqslant \varphi(x) - \varphi(e) \leqslant \beta(x) - e$ puis $\dfrac{\alpha(x) - e}{x - e} \geqslant \dfrac{\varphi(x) - \varphi(e)}{x - e} \geqslant \dfrac{\beta(x) - e}{x - e}$

D'après la question 4a, $\alpha(e) = \beta(e) = e$; α et β sont dérivables (à gauche) en e avec $\alpha'(e) = \beta'(e) = -1$, donc par passage à la limite lorsque x tend vers e par valeurs inférieures, on a $\lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(e)}{x - e} = -1$

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } e \text{ et } \varphi'(e) = -1}$$

Par composition de fonctions dérivables, $\ln \circ \varphi$ est dérivable en e avec $(\ln \circ \varphi)' = \varphi' \times (\ln' \circ \varphi) = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$

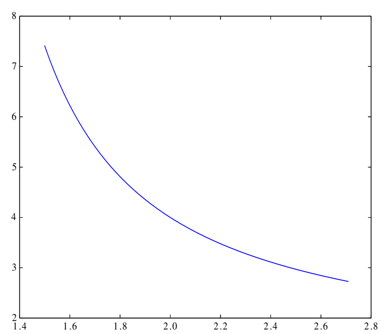
Donc $\lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{\ln\big(\varphi(x)\big) - 1}{x - e} = (\ln \circ \varphi)'(e) = -\dfrac{1}{e}$

La formule établie pour φ' à la question 2b permet d'écrire :

$\lim\limits_{x \to e^-} \varphi'(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \left(\dfrac{\varphi(x)}{x}\right)^2 \times \dfrac{\ln x - 1}{\ln\big(\varphi(x)\big) - 1} \times \dfrac{x - e}{\ln x - 1} = (\ln \circ \varphi)'(e) = 1 \times \dfrac{1}{-\frac{1}{e}} \times \dfrac{1}{e} = -1$

$\lim\limits_{x \to e^-} \varphi'(x) = \varphi'(e)$ donc φ' est continue en e.

φ est définie pour $x \in]1,e]$ et pour tout $x \in]1,e]$, $\ln x - 1 < 0$; d'autre part $\varphi(x)$ est toujours supérieur à e donc pour tout $x \in]1,e]$, $\ln\big(\varphi(x)\big) - 1 > 0$. on en déduit que φ' est toujours négatif donc φ est décroissante. Enfin l'inégalité $\alpha(x) \leqslant \varphi(x)$ et le fait que $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x) = +\infty$ entraine que φ a également pour limite $+\infty$ en 0. On obtient donc une courbe à l'allure suivante :



Partie B

1. (a) $a > 1$ donc $\ln a > 0$ et λ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$; par conséquent :

$$\begin{cases} 0 < x < a & \Longrightarrow & \lambda(x) < \lambda(a) = a, \text{ d'autre part } \lim\limits_{x \to -\infty} \lambda(x) = -\infty \\ a < x < \varphi(a) & \Longrightarrow & \lambda(a) = a < \lambda(x) < \lambda\big(\varphi(a)\big) = \varphi(a) \\ \varphi(a) < x & \Longrightarrow & \lambda\big(\varphi(a)\big) = \varphi(a) < \lambda(x), \text{ d'autre part } \lim\limits_{x \to +\infty} \lambda(x) = +\infty \end{cases}$$

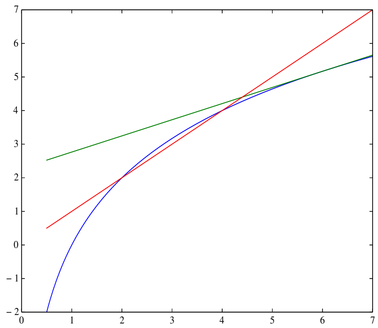
On a donc $\boxed{\lambda\Big(]0,a[\Big) =]-\infty,a[\,,\ \lambda\Big(]a,\varphi(a)[\Big) =]a,\varphi(a)[\,,\ \lambda\Big(]\varphi(a),+\infty[\Big) =]\varphi(a),+\infty[}$

$\lambda(x) - x > 0 \iff \dfrac{\ln x}{f(a)} > x \iff \dfrac{\ln x}{x} > f(a)$ (c'est à dire $f(x) > f(a)$) car x et $\ln a$ sont strictement positifs.

D'après l'étude de f et de son tableau des variations, $f(x) > f(a) \iff a < x < \varphi(a)$.

$f(a) = f\big(\varphi(a)\big)$ c'est à dire $f(a) = \dfrac{\ln\big(\varphi(a)\big)}{\varphi(a)}$ ou encore $\dfrac{1}{f(a)} = \dfrac{\varphi(a)}{\ln\big(\varphi(a)\big)} < \varphi(a)$ car $\varphi(a) > e$ et par conséquent $\ln\big(\varphi(a)\big) > 1$.

(b)



2. (a) $u_0 = \beta(a) > \varphi(a)$ d'après la question 4c, donc $u_0 \in]\varphi(a), +\infty[$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \varphi(a)$: on vient de le vérifier pour $n = 0$.

   Soit $n \geqslant 0$, supposons que $u_n > \varphi(a)$; de $\lambda\Big(]\varphi(a), +\infty[\Big) =]\varphi(a), +\infty[$, on déduit $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in]\varphi(a), +\infty[$ donc $u_{n+1} > \varphi(a)$. On a bien prouvé que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \varphi(a)}$

   (b) D'après la question 1a, $\lambda(x) - x$ est négatif pour $x > \varphi(a)$, par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda(u_n) - u_n < 0$, c'est à dire $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite (u) est décroissante.

   Comme (u) est minorée (par $\varphi(a)$) on en déduit que c'est une suite convergente et que sa limite ℓ est supérieure ou égale à $\varphi(a)$.

   λ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda(u_n)$ donc par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on a $\lambda(\ell) = \ell$.

   Or $\lambda(x) = x \iff x = a$ ou $x = \varphi(a)$; la limite a est exclue puisqu'elle doit être supérieure ou égale à $\varphi(a)$, donc finalement $\ell = \varphi(a)$.

   On a donc prouvé que $\boxed{(u) \text{ est strictement décroissante et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi(a)}$

3. (a) Soit $x_0 > \frac{1}{f(a)}$, $f(a) > 0$ donc $x_0 > 0$; la tangente T_{x_0} à la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse x_0 a pour équation : $Y - \dfrac{\ln x_0}{f(a)} = \dfrac{1}{x_0\, f(a)} \times \big(X - x_0\big)$.

   T_{x_0} et la droite d'équation $Y = X$ sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles. Le coefficient directeur de T_{x_0} vaut $\frac{1}{x_0\, f(a)}$, il est strictement inférieur à 1 (puisque $x_0 > \frac{1}{f(a)}$), donc les deux droites sont bien sécantes.

   Soit α l'abscisse du point d'intersection, α est solution de l'équation $X - \dfrac{\ln x_0}{f(a)} = \dfrac{X}{x_0\, f(a)} - \dfrac{1}{f(a)}$, donc $\alpha = \dfrac{x_0\,(\ln x_0 - 1)}{x_0\, f(a) - 1}$

$$\boxed{T_{x_0} \text{ et la première bissectrice sont sécantes au point d'abscisse } \dfrac{x_0\,(\ln x_0 - 1)}{x_0\, f(a) - 1}}$$

   (b) La fonction μ est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{f(a)}\,, +\infty\right[$ et $\forall x > \dfrac{1}{f(a)}$, $\mu'(x) = \dfrac{x\, f(a) - \ln x}{\big(x\, f(a) - 1\big)^2}$.

   μ' est du signe de $x\, f(a) - \ln x$ donc $\mu'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{\ln x}{x} \leqslant f(a)$, c'est à dire $f(x) \leqslant f(a)$.

   D'après les variations de f étudiées précédemment, cette condition est équivalente à $x < a$ ou $x > \varphi(a)$. Mais comme $a < \frac{1}{f(a)}$, $\mu' x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \varphi(a)$, donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$\frac{1}{f(a)}$		$\varphi(a)$		$+\infty$
$\mu'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\mu(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\varphi(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Remarque</u> : $\dfrac{\ln(\varphi(a))}{\varphi(a)} = f(a)$ donc $\mu\big(\varphi(a)\big) = \dfrac{\varphi(a)\,(\varphi(a)\, f(a) - 1)}{\varphi(a)\, f(a) - 1} = \varphi(a)$

Il en résulte : $\boxed{\mu\left(\left]\dfrac{1}{f(a)}\,, +\infty\right[\right) = [\varphi(a)\,, +\infty[}$

(c) $v_0 = \beta(a) > \varphi(a)$ (question partie A 4c) donc on montre par récurrence sur n que la suite v_n est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n > \varphi(a)$:

C'est bien le cas pour $n = 0$; soit à présent $n \geqslant 0$, supposons $v_n > \varphi(a)$

$v_{n+1} = \mu(v_n)$ donc $v_{n+1} \in \mu\left(\left]\dfrac{1}{f(a)}\ ,\ +\infty\right[\right)$, c'est à dire $v_{n+1} > \varphi(a)$; la propriété est héréditaire et la récurrence est établie.

Soit à présent $x > \varphi(a)$, on étudie le signe de $\mu(x) - x$:

$\mu(x) - x = \dfrac{x^2 \ln x - x\, f(a)}{x\, f(a) - 1} = \dfrac{x^2\left(\frac{\ln x}{x} - f(a)\right)}{x\, f(a) - 1} = \dfrac{x^2\,(f(x) - f(a))}{x\, f(a) - 1}$

$x > \varphi(a) > \frac{1}{a}$ donc $x\, f(a) - 1 > 0$ et $f(x) - f(a) < 0$, donc $\mu(x) - x < 0$. En appliquant ce résultat à v_n (puisque $v_n > \varphi(a)$) on obtient $\mu(v_n) - v_n = v_{n+1} - v_n < 0$, donc la suite (v) est strictement décroissante.

La suite (v) est strictement décroissante, minorée par $\varphi(a)$, donc elle converge vers ℓ tel que $\ell \geqslant \varphi(a)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \mu(v_n)$, or μ est continue sur son ensemble de définition donc par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\ell = \mu(\ell)$.

L'expression précédemment calculée de $\mu(x) - x$ montre que cette condition est réalisée si et seulement si $f(\ell) = f(a)$, ce qui dans l'intervalle considéré donne $\ell = \varphi(a)$. Nous venons d'établir que :

$$\boxed{\text{La suite } (v) \text{ est strictement décroissante et converge vers } \varphi(a)}$$

4. (a) À la calculatrice, on obtient les valeurs approchées suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	4,16	4,11	4,08	4,05	4,04	4,03	4,02
v_n	4,16	4,007	4,00001	$4 + 9 \cdot 10^{-9}$			

(b) • $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \dfrac{u_{n+1} - \varphi(a)}{u_n - \varphi(a)} = \dfrac{\lambda(u_n) - \lambda(\varphi(a))}{u_n - \varphi(a)}$ car $\lambda(\varphi(a)) = \varphi(a)$.

(u) converge vers $\varphi(a)$ et λ est dérivable en $\varphi(a)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda(u_n) - \lambda(\varphi(a))}{u_n - \varphi(a)} = \lambda'(\varphi(a))$

Or $\lambda'(\varphi(a)) = \dfrac{1}{\varphi(a)\, f(a)} = \dfrac{1}{\varphi(a)\, f(\varphi(a))} = \dfrac{1}{\ln(\varphi(a))}$ donc

Nous venons de prouver $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{\ln(\varphi(a))}}$

• $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \dfrac{v_{n+1} - \varphi(a)}{v_n - \varphi(a)} = \dfrac{\mu(u_n) - \mu(\varphi(a))}{v_n - \varphi(a)}$ car $\mu(\varphi(a)) = \varphi(a)$.

(v) converge vers $\varphi(a)$ et μ est dérivable en $\varphi(a)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(v_n) - \mu(\varphi(a))}{u_n - \varphi(a)} = \mu'(\varphi(a)) = 0$

Nous venons de prouver $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0}$

• $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{v_{n+1} - \varphi(a)}{u_{n+1} - \varphi(a)} = \dfrac{v_{n+1} - \varphi(a)}{v_n - \varphi(a)} \times \dfrac{v_n - \varphi(a)}{u_n - \varphi(a)} \times \dfrac{u_{n+1} - \varphi(a)}{u_n - \varphi(a)} = z_n \times \left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\dfrac{y_n}{x_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(en fait la valeur absolue n'est pas nécessaire car (x) et (y) sont strictement positives).*

On montre alors par récurrence sur n que $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < z_n \leqslant z_{n_0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0}$ *(pas rédigé ici)* et par conséquent :

$$\boxed{\text{La suite } (z) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} z_n = 0}$$

• On peut interpréter ce résultat en disant que $v_n - \varphi(a)$ est négligeable devant $u_n - \varphi(a)$ lorsque n tend vers l'infini, donc la convergence de la suite (v) est "plus rapide" que celle de (u).

Partie C

1. ```
from math import *
def Lambda(x,a):
    fa=log(a)/a
    return(log(x)/fa)

def Mu(x,a):
    fa=log(a)/a
    return(x*(log(x)-1)/(x*fa-1))
```

2. ```
def FonctionLambda(a,n):
    x=linspace(0.5,8,100)
    u=a/((log(a))**2);v=Lambda(u,a)
    U=[u]
    V=[v]
    for k in range(n):
        u=Lambda(u,a);v=Lambda(v,a)
        U=U+[u];V=V+[v]
    return(plot(x,Lambda(x,a)),plot(x,x),plot(U,V,marker='*'),U)
```

3. ```
def FonctionMu(a,n):
    x=linspace(3,8,100)
    u=a/((log(a))**2);v=Mu(u,a)
    U=[u]; V=[v]
    for k in range(n):
        u=Mu(u,a);v=Mu(v,a)
        U=U+[u];V=V+[v]
    return(plot(x,Mu(x,a)),plot(x,x),plot(U,V,marker='*'),U)
```

4. Les solutions de l'équation $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = x\sqrt{x}$ sont nécessairement positives, de plus on constate que 0 n'est pas solution, donc en fait elles sont strictement positives. Par conséquent si $x$ est une solution, alors $\ln x$ est défini.
   On peut donc écrire : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = x\sqrt{x} \iff \dfrac{\ln(3/2)}{3/2} = \dfrac{\ln x}{x}$, c'est à dire $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = f(x)$.
   Une solution évidente est bien sûr $x = \frac{3}{2}$, d'autre part d'après la question 3a de la partie A, il existe une unique autre solution égale à $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$.
   Il suffit donc de reprendre les fonctions précédentes avec $a = \frac{3}{2}$ et de calculer $v_n$ pour $n$ suffisamment grand.
   En fait, $v_3 \simeq 7.40876476$ et $v_6 \simeq 7.40876469$, donc $v_3$ suffit amplement pour une précision de l'ordre de $10^{-7}$
```