Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°12 - A rendre le mercredi 29 Janvier 2014

« Algèbre Linéaire - AGRO 2007 »

Dans la partie II du problème, nous supposerons donnés $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$ *vérifiant* $a < b < c$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. *Considérons alors, pour tout* $t \neq 0$, *l'équation d'inconnue* λ *:*

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda} = \frac{1}{t} \quad (E_t)$$

Nous admettrons que, pour tout $t \neq 0$, *l'équation* (E_t) *admet 3 racines réelles distinctes notées* $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.

Partie I : Étude de matrices

Dans ce problème, si M est une matrice, ${}^tM$ désigne sa transposée.

Si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $U{}^tU$ est la matrice $\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}({}^tU)$ désigne l'ensemble des matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifiant

$$ux + vy + wz = 0.$$

Si M est une matrice carrée et λ une valeur propre de M, on note E_λ^M le sous-espace propre correspondant.

Enfin, pour tout n entier naturel, I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire $X \longmapsto BX$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même associée à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.
   On note $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée et on pose $T = U{}^tU$.
   a) Déterminer le rang de T. On distinguera selon que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou non.
   b) Montrer que T^2 est proportionnel à T.
   c) Déterminer les sous-espaces propres de T. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.
   On suppose pour la suite de cette partie que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et on pose $V = \begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer le rang de V.
   b) Montrer que 0 est la seule valeur propre de V.
   c) La matrice V est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4. a) Calculer les matrices $S = {}^tVV$ et $\Omega = (u^2+v^2+w^2)I_3 - S$.
   b) La matrice S est-elle diagonalisable ?
   c) En utilisant le fait que les valeurs propres de S s'obtiennent à l'aide des valeurs propres de T, déterminer les sous-espaces propres de S.

Partie II : Spectre d'une matrice perturbée

Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in (\mathbb{R}^*)^3$ un vecteur.

On note de même qu'au II : $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $T = U{}^tU$.

Soient a, b, c trois réels, on note D la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $D(t) = D + tT$.

1. On suppose dans cette question que $a = b = c$. Quelles sont les valeurs propres de $D(t)$? Quels sont les sous-espaces propres associés ?
2. Retour au cas général. On suppose dans cette question $t \neq 0$ et $\lambda \notin \{a, b, c\}$.
   a) On suppose que λ est une valeur propre de $D(t)$. On note X un vecteur propre de $D(t)$ pour la valeur propre λ.
      i. Montrer que X vérifie $(\lambda I_3 - D)X = t\, U{}^tUX$ mais aussi
      $$ {}^tUX = t\, {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U({}^tUX). $$
      ii. Montrer que ${}^tUX \neq 0$ et en déduire que λ vérifie l'équation
      $$ {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{1}{t} \qquad (2). $$
      iii. Montrer que si λ satisfait à l'équation (2) alors il vérifie l'équation (E_t) définie dans la partie I.
   b) Étudier la réciproque et montrer que λ est valeur propre de $D(t)$ si ,et seulement si, il vérifie (E_t).
3. On suppose dans cette question que $a < b < c$ et $t \neq 0$.
   Rappeler les résultats obtenus dans la partie I quant aux solutions de l'équation (E_t).
   a) Montrer que $D(t)$ est diagonalisable.
   b) Montrer que les vecteurs $\big(\lambda_i(t)\,\mathrm{Id} - D\big)^{-1}U$ sont vecteurs propres de $D(t)$.
   c) En déduire une base de vecteurs propres de $D(t)$.
4. On suppose dans cette question que $a = b$ et $a \neq c$.
   a) Montrer que, pour $t \neq 0$, la matrice $D(t)$ admet trois valeurs propres réelles.
   b) Déterminer le sous-espace propre associé à a.

FIN

Remarques : L'énoncé est livré tel qu'il a été posé le jour du concours.

- *En particulier, les fautes d'orthographe n'ont pas été corrigées.*
- *Quelques imprécisions ou erreurs mineures subsistent !*