Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°7 - A remettre le lundi 25 novembre 2013

« Étude du contenu aléatoire de deux urnes »

On dispose de deux urnes U et V et d'une pièce qui amène Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.
On répète l'expérience suivante :
On lance la pièce.

- ▹ Si on obtient Pile, on s'intéresse à l'urne U.
  Si celle-ci est vide, on y ajoute une boule, sinon, on enlève une boule de U.
- ▹ Si on obtient Face, on s'intéresse à l'urne V.
  Si celle-ci est vide, on y ajoute une boule, sinon, on enlève une boule de V.

Le lancer de la pièce et la manipulation de l'une des deux urnes s'appelle une étape.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

- A_n : « A l'issue de la n-ième étape, les deux urnes sont vides. »
- B_n : « A l'issue de la n-ième étape, chacune des deux urnes contient une boule. »
- C_n : « A l'issue de la n-ième étape, l'une des deux urnes contient une boule et l'autre est vide. »

Enfin, on convient que A_0 : « les deux urnes sont initialement vides » est l'événement certain, que $B_0 = C_0 = \varnothing$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = P(A_n)$, $\beta_n = P(B_n)$ et $\gamma_n = P(C_n)$.

1. **Quelques calculs pour commencer**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose U_n : « On travaille dans l'urne U lors de la n-ième étape. »
   (a) Exprimer A_2 à l'aide des U_n $(n \leq 2)$. En déduire que $\alpha_2 = p^2 + q^2$.
   (b) Exprimer B_2 à l'aide des U_n $(n \leq 2)$. En déduire β_2 en fonction de p et q.

2. **Calculs des γ_n**

   (a) Calculer γ_1 et γ_2.
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cup B_n \subset C_{n+1}$ puis que $C_{n+1} \subset A_{n+2} \cup B_{n+2}$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 1 - \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq 1 - \gamma_{n+2}$.
   (d) Démontrer par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \gamma_{2k} = 0$ et $\gamma_{2k+1} = 1$.

3. **Calculs des α_{2n} et β_{2n}**

   (a) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ P_{A_{2k}}(A_{2k+2}) = P(A_2)$.
   (b) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ \alpha_{2k+2} = (p^2+q^2)\alpha_{2k} + 2pq\beta_{2k}$.
   (c) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ \alpha_{2k+2} = (p-q)^2\alpha_{2k} + 2pq$.
   Vérifier que cette relation reste valable pour $k = 0$.
   (d) Montrer que la suite (α_{2n}) est arithmético-géométrique et en déduire : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \alpha_{2k} = \dfrac{1}{2}\left(1 + (p-q)^{2k}\right)$.
   (e) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \beta_{2k} = \dfrac{1}{2}\left(1 - (p-q)^{2k}\right)$.

4. **Lorsque les deux urnes sont vides pour la première fois**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement V_n : « A l'issue de la n-ième étape, les deux urnes sont vides, et c'est la première fois que cela se produit depuis la réalisation de la première étape ».
   (a) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ P(V_{2k+1}) = 0$ (on pourra utiliser la question **2**).
   (b) Démontrer que $P(V_2) = 1 - 2pq$.
   (c) Exprimer V_4 à l'aide de B_2 et A_4. En déduire $P(V_4)$.
   (d) Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Exprimer V_{2k+2} en fonction de B_2, B_4, …, B_{2k} et de A_{2k+2}.
   En déduire que : $P(V_{2k+2}) = 4p^2q^2(1-2pq)^{k-1}$.

5. **La fin du jeu**

   On décide de réaliser la première étape puis de continuer le jeu jusqu'à ce que les deux urnes soient toutes les deux vides. Soit F : « Le jeu s'arrête. »
   (a) Exprimer F en fonction des V_n $(n \geq 1)$.
   (b) Démontrer que $P(F) = 1$ (on admettra que $1 - 2pq \in]0,1[$).