Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A remettre le mardi 13 septembre 2011

« Étude d'une suite définie par une relation de récurrence »

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\,\ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.
   Étudier les variations de φ ; établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β, et que $0,2 \leqslant \beta \leqslant 0,3$.
   (b) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide $\varphi(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x - f(x)$.
4. Construire $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives de f et de $x \mapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$; à cet effet, on introduit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = e.e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $3,5 \leqslant \alpha \leqslant 3,7$; placer le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.
2. (a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
   (b) Étudier la monotonie de g.
   (c) Montrer que l'intervalle $I = [3,5\,;\,3,7]$ est stable par g.
   (d) Établir que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant |g'(3,5)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ et, en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $|g(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{3}\,|x - \alpha|$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 3,5$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{3^n}$
   En déduire la limite de (u).
   (b) Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que cette équation admet une solution et une seule α_n (en particulier $\alpha_1 = \alpha$).
2. Comparaison de α_n à e^n :
   (a) Établir que $f(e^n) \leqslant n$ et en déduire que $\alpha_n \geqslant e^n$.
   (b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme : $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$ **(1)**
   (c) En déduire en utilisant 2a, que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^n$.
3. Comparaison de α_n à $e^n + n$:
   On écrit α_n sous la forme : $\alpha_n = e^n\,(1 + \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n \geqslant 0$ **(2)**
   (a) À l'aide de **(1)**, exprimer $(1 + \varepsilon_n)\,\ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n.
   (b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant (1 + t)\ln(1 + t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$
   (c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n \leqslant ne^{-n} \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que : $0 \leqslant ne^{-n} - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}\,e^{-2\,n}$ **(3)**
   (d) À l'aide de **(2)** et **(3)**, donner un équivalent de $\alpha_n - e^n$ lorsque $n \to \infty$.